Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

I. Fonction logarithme népérienne :

a. Activité :

On considère la fonction définie par : $\begin{cases} f :]0,+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

1. Est-ce que admet une fonction primitive sur $]0,+\infty[$? (justifier votre réponse) .
2. Combien de fonctions primitives F tel que $F(1)=0$?

b. Définition :

La fonction primitive F de $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 $(F(1)=0)$ s'appelle La fonction logarithme népérienne et note $F(x)=\ell n(x)$ ou $F(x)=\ln x$. Avec

$F'(x)=f(x) \Leftrightarrow (\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

c. Remarque :

Au lieu d'écrire $F(x)=\ln x$ on écrit $f(x)=\ln x$.

d. Conséquences :

- $\ln 1=0$
- La fonction $f(x)=\ln x$ est définie sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $f(x)=\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (car $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$).
- La fonction $f(x)=\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$ (car la fonction logarithme népérienne est dérivable) .
- La fonction $f(x)=\ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ (car $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}>0$) .
- En déduit $\forall a,b \in]0,+\infty[, a<b \Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$ et $\forall a,b \in]0,+\infty[, a=b \Leftrightarrow \ln(a)=\ln(b)$.

e. Exercice :

- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x)=\dfrac{3}{\ln x}$.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x>0$ et $\ln x \neq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ et $\ln x \neq \ln 1$

$\Leftrightarrow x>0$ et $x \neq 1$

$\Leftrightarrow x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$

Conclusion : $D_f=]0,1[\cup]1,+\infty[$ ou $D_f=]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

- Déterminons le domaine de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

On a : $x \in D_f \Leftrightarrow x>0$ et $\ln x \geq 0$

$\Leftrightarrow x>0$ et $\ln x \geq \ln 1$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

$\Leftrightarrow x>0$ et $x\geq 1$

$\Leftrightarrow x\in[1,+\infty[$

Conclusion : $D_f=[1,+\infty[$.

- Résoudre l'équation suivante : (E) : $\ln(2x)-\ln(x-1)=0$.

➢ On détermine D_E l'ensemble de définition de l'équation (E).

$x\in D_E \Leftrightarrow 2x>0$ et $x-1>0$

$\Leftrightarrow x>0$ et $x>1$

$\Leftrightarrow x>1$

Conclusion 1 : $D_E=]1,+\infty[$.

On résout l'équation dans D_E

$\ln(2x)-\ln(x-1)=0 \Leftrightarrow \ln(2x)=\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x=x-1$

$\Leftrightarrow x=-1\notin D_E=]1,+\infty[$

Conclusion 2 : l'équation (E) n'a pas de solution donc $S=\varnothing$

- Résoudre l'équation suivante : (E') : $\ln(2x)-\ln(x-1)=0$.

➢ On détermine $D_{E'}$ l'ensemble de définition de l'inéquation (E').

D'après la question précédente on a : $D_{E'}=]1,+\infty[$.

On résout l'équation dans $D_{E'}$

$\ln(2x)-\ln(x-1)\leq 0 \Leftrightarrow \ln(2x)\leq\ln(x-1)$

$\Leftrightarrow 2x\leq x-1$

$\Leftrightarrow x\leq -1$

$\Leftrightarrow x\in]-\infty,-1]$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est $]-\infty,-1]\cap D_{E'}=]-\infty,-1]\cap]1,+\infty[=\varnothing$

Conclusion 2 : l'inéquation (E') n'a pas de solution donc $S=\varnothing$

f. Signe de $\ln x$:

Soit : $x\in]0,+\infty[$ on a trois cas :

- 1er cas : $x=1$ donc : $\ln 1=0$.
- 2ième $x\in]1,+\infty[$, donc : $x>1\Rightarrow \ln x>\ln 1$ (c.à.d. $x>1\Rightarrow \ln x>0$ (car $\ln 1=0$)).
- 3ième cas $x\in]0,1[$, donc : $x<1\Rightarrow \ln x<\ln 1$ (c.à.d. $x<1\Rightarrow \ln x<0$)
- D'où le signe de $\ln x$ par un tableau

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	−	0	+	

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

II. Propriétés algébriques :

a. Propriétés :

Pour tous $a>0$ et $b>0$ et $r\in\mathbb{Q}$ on a :

1. $\ln ab=\ln a+\ln b$ (propriété admise) .
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.
3. $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$.
4. $\ln a^r=r\ln a$.

b. Preuve pour la 2ième et la 3ième :

- **Pour la 2ième :**

On a : $0=\ln 1\Leftrightarrow 0=\ln\frac{a}{a}$

$\Leftrightarrow 0=\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)$

$\Leftrightarrow 0=\ln a+\ln\left(\frac{1}{a}\right)$; (propiété n° 1)

$\Leftrightarrow -\ln a=\ln\left(\frac{1}{a}\right)$

Conclusion : $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$

- **Pour la 3ième :**

$\ln\frac{a}{b}=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)$

On a : $=\ln a+\ln\frac{1}{b}$

$=\ln a-\ln b$; (propiété n° 2)

Conclusion : $\ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b$

c. Remarque :

- $\ln\left(\sqrt{a}\right)=\frac{1}{2}\times\ln a$ et $\ln\left(\sqrt[3]{a}\right)=\frac{1}{3}\times\ln a$.
- On écrit :
  - $\ln(x)\times\ln(x)=\ln^2(x)$.
  - On général : $n\in\mathbb{N}^*$ on a : $\underbrace{\ln(x)\times\ln(x)\times\cdots\times\ln(x)}_{\text{n fois}}=\ln^n(x)=\ln^n x$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

d. Exemple :

1. On pose $\ln 2 = 0,7$ et $\ln 3 = 1,1$;calculons : $\ln 4$ et $\ln 8$ et $\ln\sqrt{3}$ et $\ln\sqrt[3]{2}$ et $\ln\sqrt[3]{3^5}$. On a :

- $\ln 4 = \ln 2^2 = 2\ln 2 = 2\times 0,7 = 1,4$ donc : $\ln 4 = 1,4$.
- $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2 = 3\times 0,7 = 2,1$ donc : $\ln 8 = 2,1$.
- $\ln\sqrt[3]{2} = \ln 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\ln 2 = \frac{1}{3}\times 0,7 \simeq 0,233$ donc : $\ln 8 = 2,1$.
- $\ln\sqrt{3} = \ln 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\times 1,1 = 0,55$ donc : $\ln\sqrt{3} = 0,55$.
- $\ln\sqrt[3]{3^5} = \ln 3^{\frac{5}{3}} = \frac{5}{3}\ln 3 = \frac{5}{3}\times 1,1 \simeq 1,833$.

2. Simplifier :

$$\ln^2\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln^2\left(3+\sqrt{2}\right)=\left(\ln\left(3-\sqrt{2}\right)+\ln\left(3+\sqrt{2}\right)\right)\times\left(\ln\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln\left(3+\sqrt{2}\right)\right)$$

$$=\ln\left[\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)\right]\times\ln\left(\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$$

$$=\ln(9-2)\times\ln\frac{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}{9-2}$$

$$=\ln 7\times\ln\frac{9-6\sqrt{2}+2}{7}=\ln 7\times\ln\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$$; (on ne peut pas simplifier)

Conclusion : $\ln^2\left(3-\sqrt{2}\right)-\ln^2\left(3+\sqrt{2}\right)=\ln 7\times\ln\frac{11-6\sqrt{2}}{7}$.

III. Limites :

a. Propriétés :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x\times\ln(x)=0^-$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$	$\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\times\ln(x)=0^-$
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x)}{x-1}=1$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$	

b. Remarques :

- $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$. Donc la courbe (C_f) de f admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) .
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique (à déterminer).
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ .Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

c. Application :

1. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}\times\dfrac{x+2}{x}=0$ car :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$ (avec $t=x+2$ et $x\to+\infty$ alors $t\to+\infty$) .
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x}=1$.

Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+2)}{x}=0$

2. Calculer : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x\times\ln x}$.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x\ln x=0^-$ (propriété) d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x\times\ln x}=-\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\dfrac{1}{x\times\ln x}=-\infty$.

3. Calculer : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^3}$.

On a : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}\times\dfrac{1}{x^2}=+\infty$.

Car $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ (propriété) et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$; $\left(\lim\limits_{x\to0}x^2=0^+\right)$.

IV. Fonction de la forme : $f(x)=\ln(u(x))$

a. Remarque :

On pose : $g(x)=\ln x$ et la fonction $u(x)$ donc : $g\circ u(x)=g(u(x))=\ln(u(x))$.

Conclusion : la fonction $f(x)=\ln(u(x))$ est la composée de deux fonctions .

- Domaine de définition de f est de la manière suivante : $x\in D_f\Leftrightarrow(x\in D_u$ et $u(x)>0)$.
- Si de plus la fonction $u(x)$ est dérivable on a : $\left[\ln(u(x))\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- De même on a : $\left[\ln(|u(x)|)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

b. Démonstration :

- pour $\left[\ln(u(x))\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

$$f'(x)=\left[\ln\left(u(x)\right)\right]'=\left[g\left(u(x)\right)\right]'=u'(x)\times g'\left(u(x)\right)=u'(x)\times\frac{1}{u(x)} \text{ car } g'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Conclusion : $\left[\ln\left(u(x)\right)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

- **Pour** $\left[\ln\left(|u(x)|\right)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

1er cas $|u(x)|=u(x)$ **déjà démontrer .**

2ième cas $|u(x)|=-u(x)$

on a : $\left[\ln\left(|u(x)|\right)\right]'=\left[\ln\left(-u(x)\right)\right]'=\left(-u(x)\right)'\times\ln'\left(-u(x)\right)=-u'(x)\times\frac{1}{-u(x)}=\frac{u(x)}{u(x)}$.

Conclusion : $\left[\ln\left(|u(x)|\right)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

c. Exemple :

Calculons f' avec $f(x)=\ln|x^2-x|$.

On a : $f'(x)=\left[\ell n|x^2-x|\ \right]'=\dfrac{(x^2-x)'}{x^2-x}=\dfrac{2x-1}{x^2-x}$.

d. Vocabulaire et remarque :

- Soit f fonction dérivable sur I et $\forall x\in I$: $u(x)\neq 0$.

  La fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est appelée la dérivée logarithmique de la fonction u sur I .

- Puis que $\left[\ln\left(|u(x)|\right)\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc les fonctions primitives de la fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions de la forme $F(x)=\ln|u(x)|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

e. Exemple :

- Trouver les fonctions primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ sur $]2,+\infty[$.

On a : $f(x)=\dfrac{5}{x-2}=\dfrac{(x-2)'}{x-2}$.

donc : les fonctions primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ sont les fonctions de la forme $F(x)=\ln|x-2|+c$ avec $c\in\mathbb{R}$, puis que $x\in]2,+\infty[$ donc $F(x)=\ln(x-2)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

Conclusion : les fonctions primitives de la fonction $f(x)=\dfrac{5}{x-2}$ sont $F(x)=\ln(x-2)+c$ avec $c\in\mathbb{R}$.

- Trouver la fonction dérivée logarithmique de la fonction $u(x)=3x^2-5x$.

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

La fonction dérivée logarithmique de u est fonction suivante $x \to \dfrac{6x-5}{3x^2-5x}$.

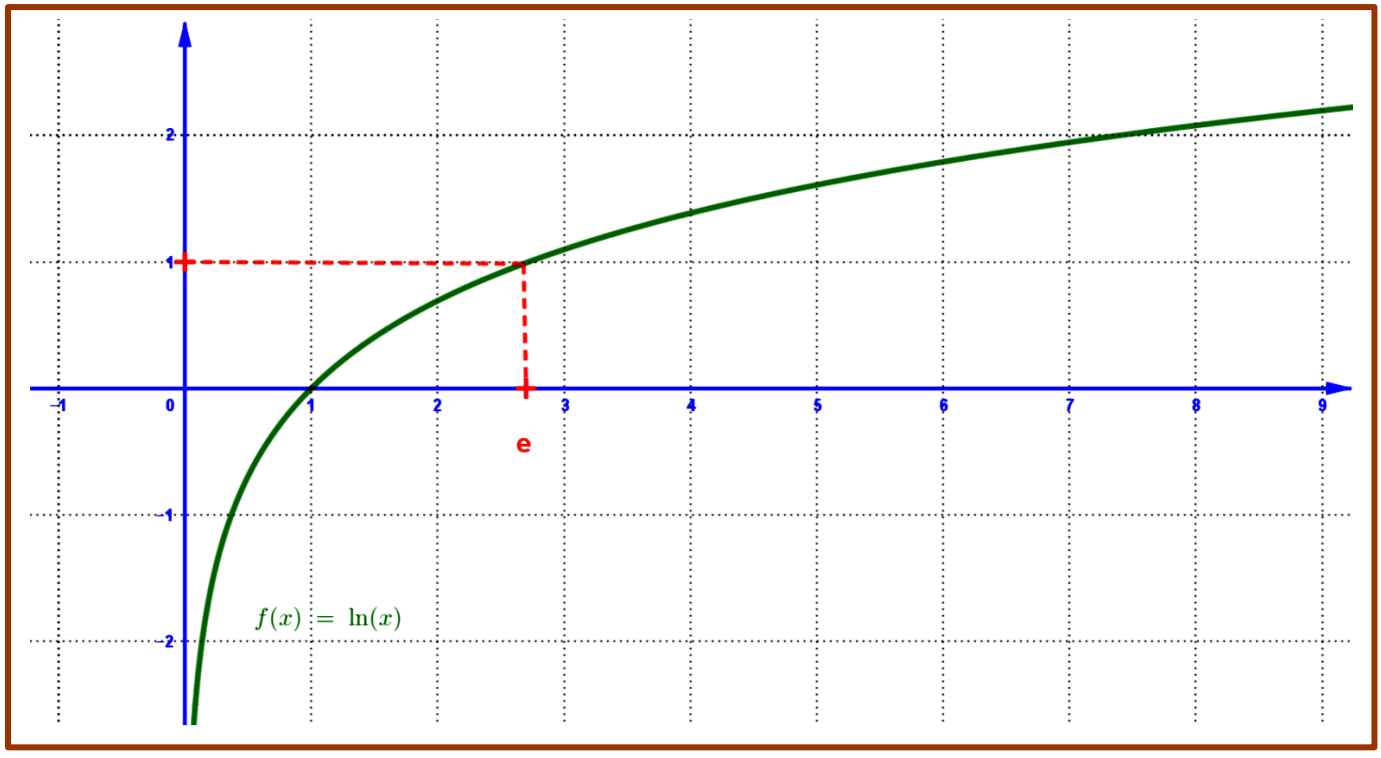
V. Etude de la fonction $f(x)=\ln x$:

- Domaine de définition : $D_f =]0,+\infty[$.
- Continuité : f est continue sur $D_f =]0,+\infty[$.
- Limites :
  - $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$. Donc la courbe (C_f) de f admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x=0$ (l'axe des ordonnées) .
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$ Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique on détermine :

    $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $a = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ .Donc la courbe (C_f) de f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses .
- Sens de variation de f .
  - La fonction dérivée de f est : $f'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x} > 0$
  - La fonction est strictement croissante sur $D_f =]0,+\infty[$
  - Tableau de variations de f :

x	0	1	$+\infty$
f '	‖	+	
f	‖ $-\infty$	↗ 0	↗ $+\infty$

- La courbe représentative de f :



Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

❖ **Remarque :**

- La fonction $f(x)=\ln x$ est continue sur $]0,+\infty[$.
- La fonction $f(x)=\ln x$ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
- Donc : $f(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$ donc l'équation $x\in]0,+\infty[$; $f(x)=1$ admet une solution et une seule on note ce nombre unique par $e\simeq 2,718$ (valeur approché) qui est un nombre irrationnel .
- **Conclusion :** $\ln e=1$ et $\ln\frac{1}{e}=-1$ et $\ln e^r=r$; $(r\in\mathbb{Q})$.
- **Application :** on détermine l'ensemble de définition de $f(x)=\frac{1}{3-\ln(x)}$.

$$x\in D_f \Leftrightarrow x>0 \text{ et } 3-\ln(x)\neq 0$$
$$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln(x)\neq 3$$
$$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } \ln(x)\neq \ln e^3$$
$$\Leftrightarrow x>0 \text{ et } x\neq e^3$$

D'où : ensemble de définition de f est : $D_f=]0,e^3[\cup]e^3,+\infty[$.

VI. Fonction logarithme de base a et propriétés :

A. Fonction logarithme de base a :

a. Définition :

Soit $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ (c.à.d. a strictement positif et différent de 1) .

La fonction définie par :

$$f :]0,+\infty[\to\mathbb{R}$$
$$x\to f(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

S'appelle la fonction logarithme de base a , on note cette fonction par $f=\log_a$ d'où : $f(x)=\log_a(x)$.

b. Conséquences :

- $\log_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ et $\log_a(1)=\frac{\ln(1)}{\ln(a)}=0$.
- $\log_a(a)=\frac{\ln(a)}{\ln(a)}=1$ et $\log_a(e)=\frac{\ln(e)}{\ln(a)}=\frac{1}{\ln(a)}$.

c. Cas particuliers :

- **Cas $a=e$:** $\log_e(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(e)}=\ln(x)$ donc logarithme de base $a=e$ est le logarithme népérienne .
- **Cas $a=10$:** on obtient la fonction $f(x)=\log_{10}(x)$ s'appelle la fonction logarithme décimale on note $\log_{10}=\text{Log}$ d'où : $f(x)=\log_{10}(x)=\text{Log}(x)$.
- $\text{Log}(10^r)=r$; $\text{Log}(10)=1$; $\text{Log}(1)=0$.

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

B. Propriétés logarithme de base a :

a. Propriétés :

Soit $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ et pour tout x et y de $]0,+\infty[$ on a :

- $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$.
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
- $\log_a(x^r) = r \times \log_a(x)$ avec $r \in \mathbb{Q}$.
- $\log_a\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$ et $\log_a\left(\sqrt[3]{x}\right) = \frac{1}{3} \times \log_a(x)$.

b. Démonstration :

Démonstration pour $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

On a : $\log_a(x \times y) = \frac{\ln(x \times y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$

Conclusion : $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$.

C. Etude de la fonction : $f(x) = \log_a(x)$:avec $f(x) = \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

- Domaine de définition de f : $x \in D_f \Leftrightarrow x > 0$ d'où $D_f =]0,+\infty[$.
- Continuité de f : f est continue sur $]0,+\infty[$.
- Limites aux bornes de D_f :
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \begin{cases} +\infty \text{ si } a \in]1,+\infty[\\ -\infty \text{ si } a \in]0,1[\end{cases}$.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \begin{cases} -\infty \text{ si } a \in]1,+\infty[\\ +\infty \text{ si } a \in]0,1[\end{cases}$
- Sens de variations de f :
  - Dérivée : $f'(x) = (\log_a(x))' = \left[\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right]' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}$. d'où : $(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln a}$.
  - $f'(x) \begin{cases} \geq 0 \text{ si } a \in]1,+\infty[\\ \leq 0 \text{ si } a \in]0,1[\end{cases}$.
  - Tableau de variations de f .

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

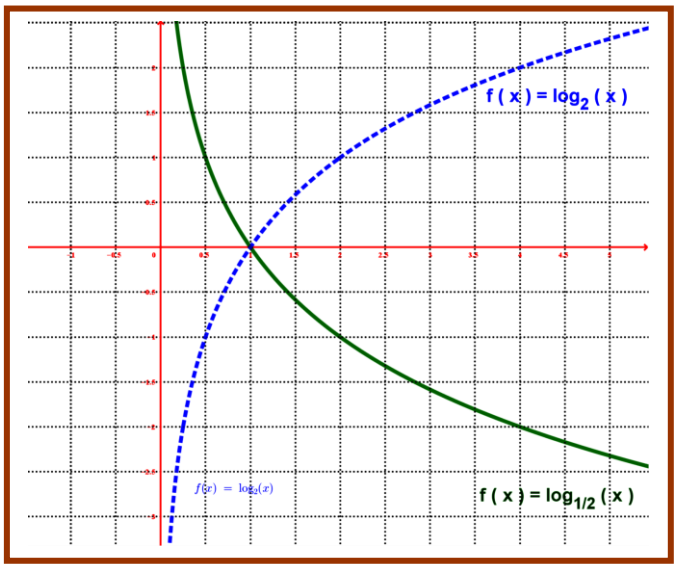
Cas $a \in]1,+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
f '	‖	+	‖	+	
f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

cas $a \in]0,1[$:

x	0		1		$+\infty$
f '	‖	+	‖	+	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

- Courbe représentative de f dans un repère orthonormé $a=2$ et $a=\frac{1}{2}$.



c. Exercices :

1. On simplifie :

$$\log_2(8)-\log_2\left(\sqrt[3]{32}\right)+\log_2(9)-\log_2(3)=\log_2\left(2^3\right)-\log_2\left(2^{\frac{5}{3}}\right)+\log_2\left(3^2\right)-\log_2(3)$$

$$=3-\frac{5}{3}+2\log_2(3)-\log_2(3)$$

$$=\frac{4}{3}+\log_2(3)$$

2. On simplifie :

$$\log_3\left(\frac{15}{4}\right)+\log_2\left(\frac{1}{27}\right)+\log_3\left(\frac{4}{5}\right)=\log_3\left(\frac{15}{4}\times\frac{4}{5}\right)+\log_2\left(3^3\right)$$

$$=\log_3 3-\log_2 3^3$$

$$=1-\log_2 27$$

$$=\log_2(2)-\log_2(27)$$

$$=\log_2\left(\frac{2}{27}\right)$$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

3. **On simplifier :**

$$\log(100)-\log\left(10^{2013}\right)+\log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)=\log 10^{2}-\log 10^{2019}-\log 10^{100}$$
$$=2\log 10-2019\log 10-100\log 10$$
$$=-2117\log 10$$

4. **Montrer que :** $\forall a,b\in\left]1,+\infty\right[\ ;\ \log_b(a)=\frac{1}{\log_a(b)}$

On a : $\frac{1}{\log_a(b)}=\frac{1}{\frac{\ln b}{\ln a}}=\frac{\ln a}{\ln b}=\log_b(a)$.

Conclusion : $\forall a,b\in\left]1,+\infty\right[\ ;\ \log_b(a)=\frac{1}{\log_a(b)}$.

5. **Résoudre dans $\mathbb{R}$: l'équation suivante** $\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0$.

- **On détermine domaine de définition de l'équation :**

On a ;

$x\in D_E \Leftrightarrow 2x>0$ et $x>0$

$\Leftrightarrow x>0$

$\Leftrightarrow x\in\left]0,+\infty\right[$

Donc domaine de définition de l'équation est $D_E=\left]0,+\infty\right[$.

- **On résout l'équation dans** $D_E=\left]0,+\infty\right[$:

$\log_3(2x)\times\left(\log_5(x)-1\right)=0 \Leftrightarrow \log_3(2x)=0$ ou $\left(\log_5(x)-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_3(2x)=\log_3(1)$ ou $\log_5(x)=1$

$\Leftrightarrow 2x=1$ ou $x=1$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\in D_E$ ou $x=1\in D_E$

Conclusion : ensemble des solutions de l'équation est $S=\left\{\frac{1}{2},1\right\}$.

6. **Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante** $\log_{\sqrt{3}}(3x-1)\geq\log_{\sqrt{3}}(x+1)$.

- **On détermine domaine de définition de l'inéquation :**

On a ;

$x\in D_{E'} \Leftrightarrow 3x-1>0$ et $x+1>0$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$ et $x>-1$

$\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

Donc domaine de définition de l'équation est $D_{E'} = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

- On résout l'équation dans $D_{E'} = \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$:

$$\log_{\sqrt{3}}(3x-1) \geq \log_{\sqrt{3}}(x+1) \Leftrightarrow 3x-1 > x+1 \ ; \ (\text{car } a = \sqrt{3} > 1)$$
$$\Leftrightarrow 2x > 2$$
$$\Leftrightarrow x > 1$$
$$\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$$

Conclusion: ensemble des solutions de l'inéquation est $S = D_{E'} \cap]1, +\infty[= \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[\cap]1, +\infty[=]1, +\infty[$

7. Etudier la fonction suivante : $f(x) = \log_5(x+1)$

- Domaine de définition de f :

$$x \in D_E \Leftrightarrow x+1 > 0$$
$$\Leftrightarrow x > -1$$
$$\Leftrightarrow x \in]-1, +\infty[$$

domaine de définition de f est $D_{E'} =]-1, +\infty[$

- Limites aux bornes de D_f :

✓ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \log_5(x+1) = \lim\limits_{x \to -1^+} \frac{\ln(x+1)}{\ln 5} = -\infty$.

car $\lim\limits_{x \to -1^+} \ln(x+1) = -\infty$; $(\lim\limits_{x \to -1^+} x+1 = 0^+)$ et $\ln 5 > 0$

✓ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \log_5(x+1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln 5} = +\infty$.

car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x+1) = +\infty$; $(\lim\limits_{x \to -1^+} x+1 = +\infty)$ et $\ln 5 > 0$

- Branches infinies ;

✓ Puis que $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ donc la courbe (C_f) admet une asymptote verticale la droite d'équation $x = -1$.

✓ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ on détermine $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{\ln(x+1)}{\ln 5}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x \ln 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{1}{\ln 5} = 0$$

Car : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0 \ (x \to +\infty \Rightarrow t \to +\infty)$

D'où : la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées .

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع
Pro. Benmoussa Med

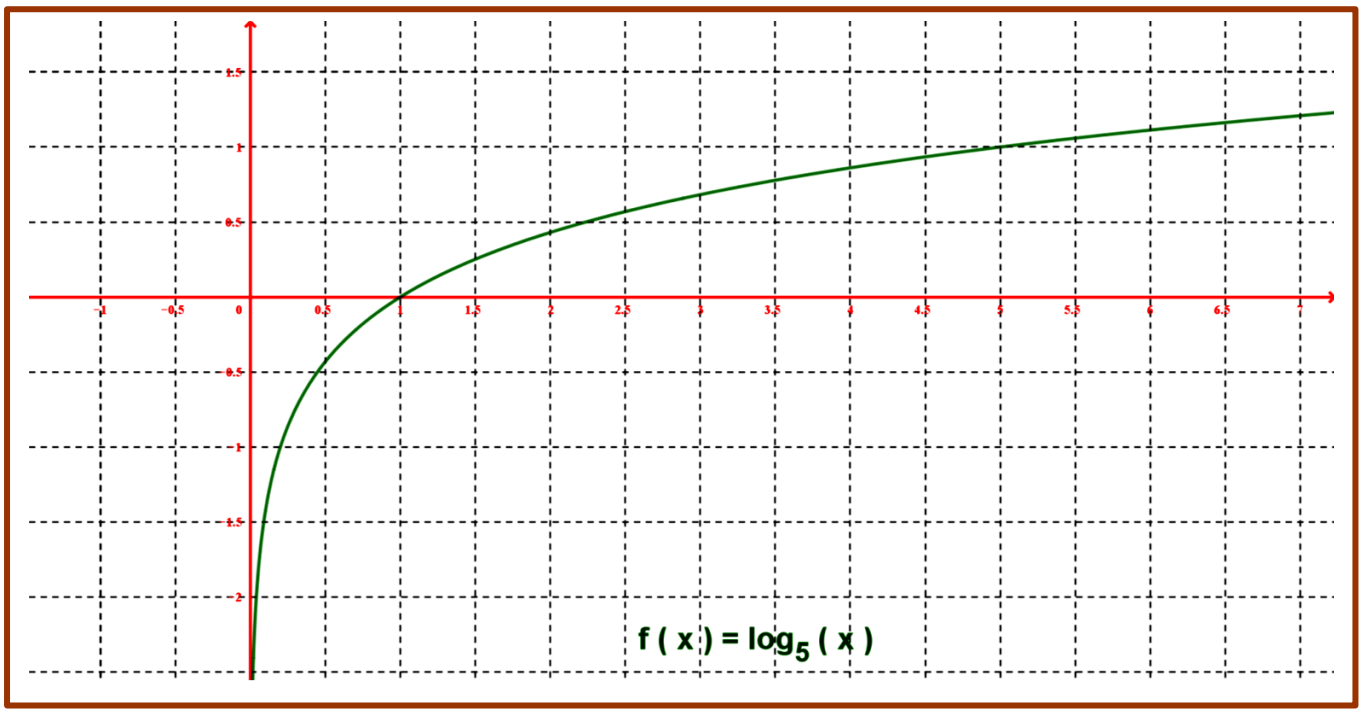
- Sens de variations de f :
  - ✓ Fonction dérivée de f :

$$f'(x)=\left(\log_5(x+1)\right)'=\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln 5}\right)'=\frac{1}{\ln 5}\times\frac{(x+1)'}{x+1}=\frac{1}{\ln 5}\times\frac{1}{x+1}>0 \text{ car } x\in]-1,+\infty[$$

  - ✓ Tableau de variations de f :

x	-1		$+\infty$
f '	‖	+	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

- La courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$



Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع