هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

# الجداء المتجهي

## I- توجيه الفضاء

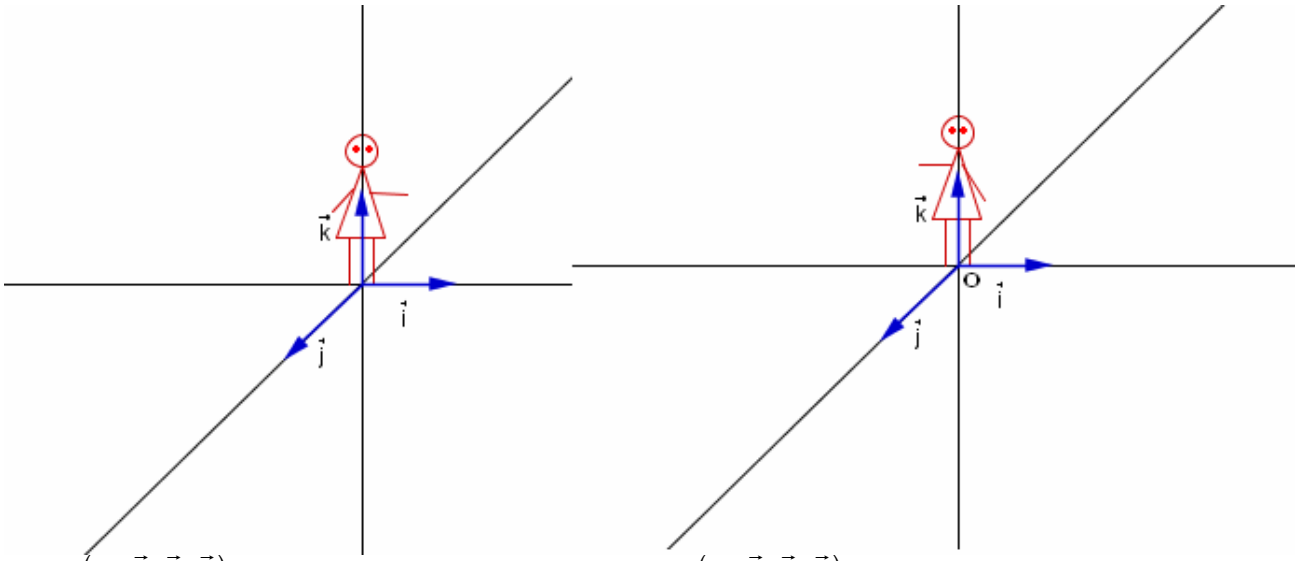
### 1- معلم موجه في الفضاء

ننسب الفضاء E إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

« رجل أمبير » للمعلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر إلى I

,النقطة J إما توجد على يمين« رجل أمبير » أو على يساره .




$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم غير مباشر

**تعريف :**

الفضاء منسوب إلى معلم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ . لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$

نقول إن : * $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »

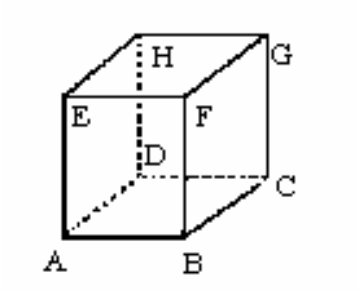
* $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

**أمثلة** * نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم مباشر

$(O;\vec{j};\vec{i};\vec{k})$ معلم غير مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};-\vec{k})$ معلم غير مباشر

$(O;\vec{j};\vec{k};\vec{i})$ معلم مباشر

** ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1




$(B;\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BF})$ ; $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE})$ معلمان مباشران

$(E;\overrightarrow{EA};\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EH})$ , $(A;\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE})$ معلمان غير مباشرين

### 2- الأسرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء $V_3$ , اذا وجهنا جميع أساساته

**تعريف**

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشر اذا كان $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ م.م.م .مباشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

### 3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و $\vec{k}$ متجهة واحدية و منظمية على (P) , و O نقطة من المستوى (P)

$(O;\vec{i};\vec{j})$ م.م.م للمستوى (P)

لدينا $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم للفضاء E



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$ في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد الممنظم $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ مباشرا

* يتم توجيه مستو ى (P) بتوجيه متجهة منظمية عليه.
* كل المستويات الموازية لـ(P) له نفس توجيه المستوى (P)

## II – الجداء المتجهي

### 1- تعريف

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء $V_3$ وA و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هدا الترتيب ,هو المتجهة التي لها بـ $\vec{u}\wedge\vec{v}$ المعرفة كما يلي :

* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{o}$ .
* إذا كانتا $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين فان $\vec{u}\wedge\vec{v}$ هي المتجهة التي تحقق :
  - $\vec{u}\wedge\vec{v}$ عمودي على كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$
  - $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .
  - $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta$ حيث $\theta$ قياس الزاوية $\left[\widehat{AOB}\right]$

**أمثلة** * نعتبر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i}\wedge\vec{i}=\vec{j}\wedge\vec{j}=\vec{k}\wedge\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k} \qquad \vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i} \qquad \vec{k}\wedge\vec{i}=\vec{j}$$
$$\vec{j}\wedge\vec{i}=-\vec{k} \qquad \vec{k}\wedge\vec{j}=-\vec{i} \qquad \vec{i}\wedge\vec{k}=-\vec{j}$$

* إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين واحديتين و متعامدتين فان $(\vec{u};\vec{v};\vec{u}\wedge\vec{v})$ أساس مباشر .

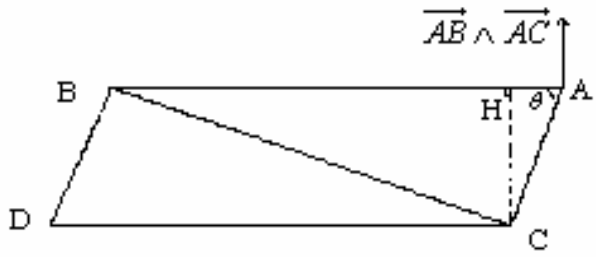
تمرين نحسب $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ علما أن $\theta\in]0;\pi[$ $(\overrightarrow{\vec{u};\vec{v}})=\theta$ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-5$ $\|\vec{v}\|=2$ $\|\vec{u}\|=5$

### 2- خاصيات

#### أ- خاصية

إذا كانت A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC).

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء $\theta$ قياس الزاوية $\left[\widehat{CAB}\right]$ , H المسقط العمودي لـ C على (AB)




$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB.AC.\sin\theta \qquad HC=AC\sin\theta$$
$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|=AB\times HC$$

**خاصية**

مساحة المثلث ABC هو نصف $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

**نتيجة**

مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

#### د- خاصية

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء
يكون $\vec{u}\wedge\vec{v}$ منعدما أداو فقط كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين

البرهان * $\Rightarrow$(بديهي – التعريف-)
* $\Leftarrow$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}\Leftrightarrow\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$$
$$\Rightarrow\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\|\vec{u}\|=0\quad\vee\quad\|\vec{v}\|=0\quad\vee\quad\sin\theta=0$$
$$\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}\quad\vee\quad\vec{v}=\vec{0}\quad\vee\quad\vec{u}\,et\,\vec{v}\quad sont\ liés$$

**ملاحظة** $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow$ A وB و C مستقيمية

## ج- الجداء المتجهي والعمليات(نقبل)

$$\forall(\vec{u};\vec{v};\vec{w})\in V_3^3\qquad\forall\alpha\in\mathbb{R}\qquad(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{w}+\vec{v}\wedge\vec{w}$$
$$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v}=\alpha(\vec{u}\wedge\vec{v})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=-(\vec{v}\wedge\vec{u})$$
$$\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}\wedge\vec{u}=\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$$

**تمرين**

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر .

أحسب $\vec{i}\wedge3\vec{j}$ $\quad(\vec{i}+2\vec{k})\wedge\vec{j}$ $\quad(\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})\wedge\vec{k}$ $\quad(2\vec{i}-\vec{j})\wedge(3\vec{i}+4\vec{j})$

**تمرين**

لتكن $\vec{a}\wedge\vec{b}=\vec{c}\wedge\vec{d}$ ; $\vec{a}\wedge\vec{c}=\vec{b}\wedge\vec{d}$

بين إن $\vec{a}-\vec{d}$ و $\vec{b}-\vec{c}$ مستقيميتان

## 3- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م مباشر.

$(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{u}(x;y;z)\qquad\vec{v}(x';y';z')$$
$$\vec{u}\wedge\vec{v}=(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\wedge(x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k})$$
$$=(yz'-zy')\vec{i}+(zx'-xz')\vec{j}+(xy'-yx')\vec{k}$$

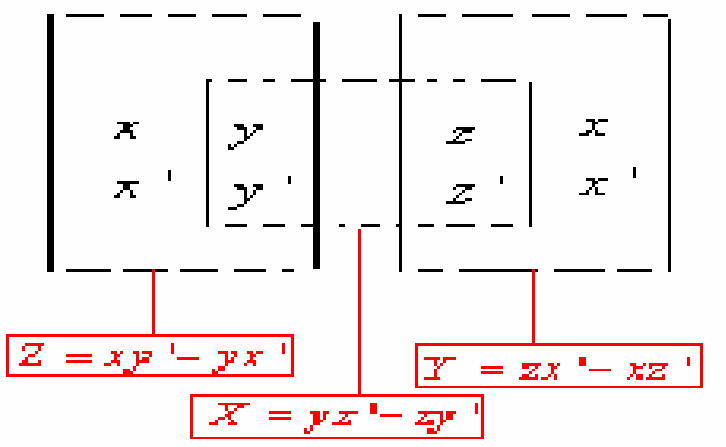
**خاصية**

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ و $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x(;y';z')$ متجهتان من $V_3$

إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u}\wedge\vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ هو (X;Y;Z) حيث

$$X=yz'-zy'\qquad Y=zx'-xz'\qquad Z=xy'-yx'$$

**ملاحظة** يمكن استعمال الوضعية التالية




**مثال** نعتبر $\vec{v}(-2;-1;1)$ $\quad\vec{u}(1;2;0)$ $\quad A(1;2;1)$ $\quad B(0;-3;2)$ $\quad C(1;2;1)$

حدد $\vec{u}\wedge\vec{v}$ أحسب مساحة المثلث (ABC)

## III – تطبيقات الجداء المتجهي



Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

## 1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمية

**خاصية**

لتكن A وB وC ثلاث نقط غير مستقيمية من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AM}$$

**مثال** نعتبر A(1;2;3) و B(1;-1;1) و C(2;1;2) حدد معادلة المستوى (ABC)

## 2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

(P) : ax+by+cz+d=0

(P´) : a´x+b´y+c´z+d´=0

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظممية لـ (P) و$\vec{n}'(a';b';c')$ منظممية لـ (P´)

* اذا كان (P) و(P´) متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و(P´) موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$
* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و(P´) متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

**تمرين**

حدد تقاطع (P): x+2y-2z+3=0 و (P´): 4x-4y+2z-5=0

## 3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من Aو موجه بـ $\vec{u}$ , M نقطة من الفضاء وH مسقطها العمودي على(D)

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}\right) \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{u} \qquad \overrightarrow{AH} et \vec{u} \quad liés$$

$$\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM} \wedge \vec{u}\right\| = HM.\|\vec{u}\| \sin\frac{\pi}{2} = HM.\|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$$

**خاصية**

في الفضاء (D) مستقيم مار من Aو موجه بـ $\vec{u}$ , M نقطة من الفضاء.

مسافة النقطة M عن المستقيم (D) هي $d\left(M;(D)\right) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\right\|}{\|\vec{u}\|}$

**تمرين**

A(3;2;-1) $\quad (D): \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad d\left(A;(D)\right) = ?$

**تمرين**

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر A(1;2;1)و B(-2;1;3) و (D) المستقيم الذي معادلته $\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases}$

1- حدد $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد d(A;(D))

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S)التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma