هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تصحيح وطني 2020
الدورة العادية - علوم تجريبية

التمرين الأول (4 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0=\frac{3}{2}$ و $u_{n+1}=\frac{2u_n}{2u_n+5}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
1) أحسب u_1	0.25
2) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$، $u_n>0$	0.5
3) أ) بين أن $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$، ثم استنتج أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$	1
ب) أحسب النهاية $\lim u_n$	0.5
4) نعتبر (v_n) المتتالية العددية المعرفة ب $v_n=\frac{4u_n}{2u_n+3}$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$	0.75
ب) حدد v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$	1

التمرين الثاني (5 نقاط)

1) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E)\ :\ z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$	
أ) تحقق من أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=-4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$	0.5
ب) استنتج حلي المعادلة (E)	1
2) نعتبر الأعداد العقدية : $a=\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ و $b=1+i\sqrt{3}$ و $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$	
أ) تحقق من أن $b\overline{c}=a$ و استنتج أن $ac=4b$	0.75
ب) أكتب العددين العقديين b و c على الشكل المثلثي	0.5
ج) استنتج أن $a=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$	0.5
3) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$، نعتبر النقط B و C و D التي ألحاقها على التوالي هي b و c و d حيث $d=a^4$. ليكن z لحق نقطة M من المستوى و z' لحق النقطة M' صورة النقطة M بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{12}$	
أ) تحقق أن $z'=\frac{1}{4}az$	0.5
ب) حدد صورة النقطة C بالدوران R	0.25
ج) حدد طبيعة المثلث OBC	0.25
د) بين أن $a^4=128b$ و استنتج أن النقط O و B و D مستقيمية	0.75

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

التمرين الثالث (4 نقاط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x)=2\sqrt{x}-2-\ln x$

1) أ) بين أن لكل x من المجال $]0,+\infty[$ ، $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$ — 0.5

ب) بين أن الدالة g تزايدية على المجال $]1,+\infty[$ — 0.5

ج) استنتج أن لكل x من المجال $]1,+\infty[$ ، $0\le \ln x\le 2\sqrt{x}$ (لاحظ أن $2\sqrt{x}-2\le 2\sqrt{x}$) — 0.5

د) بين أن لكل x من المجال $]1,+\infty[$ ، $0\le \dfrac{\ln x}{x^2}^3\le \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ ثم استنتج النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}^3$ — 1

2) أ) بين أن الدالة G المعرفة بما يلي : $G(x)=x\left(-1+\dfrac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)$ هي دالة أصلية للدالة g على $]0,+\infty[$ — 0.75

ب) أحسب التكامل $\int_1^4 g(x)\,dx$ — 0.75

المسألة (7 نقاط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x)=-x+\dfrac{5}{2}-\dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

و C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة : $2cm$)

1) بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ — 0.5

2) أ) برهن أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x+\dfrac{5}{2}$ مقارب للمنحنى C بجوار $-\infty$ — 0.5

ب) حل المعادلة $e^{x-2}-4=0$ ثم بين أن المنحنى C يوجد فوق Δ على المجال $]-\infty,2+\ln 4]$ و تحت Δ على المجال $[2+\ln 4,+\infty[$ — 0.75

3) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم أول النتيجة هندسيا — 0.5

4) أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=-\left(e^{x-2}-1\right)^2$ — 0.5

ب) ضع جدول تغيرات الدالة f — 0.25

5) أحسب $f''(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم بين أن $A(2,2)$ نقطة انعطاف للمنحنى C — 0.75

6) أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$ — 0.5

7) أنشئ Δ و C في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (نأخذ القيمتين المقربتين التاليتين: $\ln 2\simeq 0,7$ و $\ln 3\simeq 1,1$) — 1

8) أ) بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $\mathbb{R}$ — 0.5

ب) أنشئ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ المنحنى الممثل للدالة f^{-1} (لاحظ أن المستقيم Δ عمودي على المنصف الأول للمعلم) — 0.75

ج) أحسب $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (لاحظ أن $f^{-1}(2-\ln 3)=2+\ln 3$) — 0.5

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

تصحيح التمرين الأول

1) $u_1=\dfrac{2u_0}{2u_0+5}=\dfrac{2\times\frac{3}{2}}{2\times\frac{3}{2}+5}=\dfrac{3}{3+5}=\dfrac{3}{8}$

2) لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$، $u_n>0$

✓ من أجل $n=0$

لدينا : $u_0=\dfrac{3}{2}$

إذن : $u_0>0$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $u_n>0$

▷ و نبين أن : $u_{n+1}>0$

حسب الافتراض ، لدينا $u_n>0$

إذن $2u_n>0$ و $2u_n+5>0$

إذن $\dfrac{2u_n}{2u_n+5}>0$

و منه $u_{n+1}>0$

✓ نستنتج أن : لكل n من $\mathbb{N}$، $u_n>0$

3) أ)

○ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▪ نعلم أن $u_n>0$ إذن من الواضح أن $u_{n+1}>0$

▪ لدينا $5\leq 2u_n+5$

إذن $\dfrac{1}{2u_n+5}\leq\dfrac{1}{5}$

إذن $\dfrac{1}{2u_n+5}\times 2u_n\leq\dfrac{1}{5}\times 2u_n$

إذن $u_{n+1}\leq\dfrac{2}{5}u_n$

نستنتج أن $0<u_{n+1}\leq\dfrac{2}{5}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ لنبين بالترجع أن $0<u_n\leq\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ من أجل $n=0$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

لدينا : $u_0=\frac{3}{2}$ و $\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0=\frac{3}{2}$

إذن : $0<u_0\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^0$

✓ ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ نفترض أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

▷ و نبين أن $0<u_{n+1}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

نعلم أن $\boxed{0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n}$ (1)

وحسب الافتراض لدينا : $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

إذن $\boxed{0<\frac{2}{5}u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $0<u_{n+1}\leq\frac{2}{5}u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

وبالتالي : $0<u_{n+1}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

✓ نستنتج أن $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

ب)

○ لدينا $0<u_n\leq\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ لكل n من $\mathbb{N}$

○ بما أن $-1<\frac{2}{5}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

4) أ) ليكن $n\in\mathbb{N}$
لدينا :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3} \\ &= \frac{4(\frac{2u_n}{2u_n+5})}{2(\frac{2u_n}{2u_n+5})+3} \\ &= \frac{\frac{8u_n}{2u_n+5}}{\frac{4u_n+6u_n+15}{2u_n+5}} \\ &= \frac{8u_n}{10u_n+15} \\ &= \frac{2\times 4u_n}{5\times(2u_n+3)} \\ &= \frac{2}{5}\times v_n \end{aligned}$$

إذن : $v_{n+1}=\frac{2}{5}\times v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$

ب) ليكن $n\in\mathbb{N}$

▷ لدينا (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{2}{5}$ و حدها الأول $v_0=\frac{4u_0}{2u_0+3}=\frac{4\left(\frac{3}{2}\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right)+3}=\frac{6}{6}=1$

إذن: $v_n=v_0\times q^n$

إذن : $v_n=1\times\left(\frac{2}{5}\right)^n$

و منه : $\boxed{v_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

▷ لدينا:

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

$$v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3} \Leftrightarrow 4u_n = 2u_n v_n + 3v_n$$
$$\Leftrightarrow 4u_n - 2u_n v_n = 3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n(4-2v_n) = 3v_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3v_n}{4-2v_n}$$

إذن : $\boxed{u_n = \dfrac{3\left(\frac{2}{5}\right)^n}{4-2\left(\frac{2}{5}\right)^n}}$ لكل n من $\mathbb{N}$

تصحيح التمرين الثاني

1) أ)

$$\begin{aligned}\Delta &= -2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 - 4\times 1\times 16\\ &= 4(8+2\sqrt{12})-64\\ &= -32+8\sqrt{12}\\ &= -4\left(8-2\sqrt{12}\right)\\ &= -4\left(\sqrt{6}^2-2\sqrt{6}\sqrt{2}+\sqrt{2}^2\right)\\ &= -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

ب) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z+16=0$

لدينا $\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$

إذن للمعادلة حلين عقديين مترافقين

$z = \dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$ أو $z = \dfrac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2}$

$z = \sqrt{2}+\sqrt{6}-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$ أو $z = \sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

و بالتالي : $S = \left\{\sqrt{2}+\sqrt{6}-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right);\ \sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right\}$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

2) أ)

○

$$\begin{aligned} b\overline{c} &= (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\ &= \sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\ &= a \end{aligned}$$

○

$$\begin{aligned} ac &= b\overline{c}c \\ &= b\times|c|^2 \\ &= b\times\left(\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}\right)^2 \\ &= 4b \end{aligned}$$

ب)

▷ لدينا : $b=1+i\sqrt{3}$

معيار العدد b : $|b|=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$

$$b=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

▷ لدينا : $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

معيار العدد c : $|c|=\sqrt{\sqrt{2}^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{4}=2$

$$c=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

ج) لدينا $ac=4b$

إذن $a=4\dfrac{b}{c}$

إذن $a=4\dfrac{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}=4\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

3) أ)

M' z' صورة النقطة M z بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{12}$

$$z'-0=e^{i\frac{\pi}{12}}(z-0)$$
$$z'=\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)z$$
$$z'=\frac{1}{4}az$$

ب) لنحدد صورة النقطة C بالدوران R

لدينا $\frac{1}{4}ac=\frac{1}{4}\times 4b=b$

إذن B هي صورة C بالدوران R

ج) لدينا B هي صورة C بالدوران R

إذن $OC=OB$ و $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\equiv\frac{\pi}{12}\ 2\pi$

و منه المثلث OBC متساوي الساقين

د)

▷ لدينا $a=4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

إذن حسب علاقة موافر :

$$a^4=4^4\left(\cos\left(4\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(4\frac{\pi}{12}\right)\right)=256\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=256\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=128\ 1+i\sqrt{3}\ =128b$$

▷ $\frac{d-0}{b-0}=\frac{a^4}{b}=\frac{128b}{b}=128$

بما أن $\frac{d-0}{b-0}\in\mathbb{R}$ فإن النقط Oو B و D مستقيمية.

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

تصحيح التمرين الثالث

1) أ) الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $0,+\infty$

ليكن $x \in 0,+\infty$

لدينا: $g' x = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x \ ' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$

إذن : لكل x من المجال $0,+\infty$ ، $g' x = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

ب) ليكن $x \in 1,+\infty$

لدينا $g' x = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$

بما أن $x > 0$ فإن إشارة $g' x$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

نعلم أن $x \geq 1$

إذن $\sqrt{x} \geq 1$

إذن $\sqrt{x}-1 \geq 0$

و منه $g' x \geq 0$ لكل x من $1,+\infty$

و بالتالي الدالة g تزايدية على المجال $1,+\infty$

ج) ليكن $x \in 1,+\infty$

- لدينا $1 \leq x$ إذن $0 \leq \ln x$
- ولدينا $1 \leq x$ و الدالة g متصلة و تزايدية على المجال $1,+\infty$

إذن $g\ 1 \leq g\ x$

إذن $0 \leq 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$ (لأن $g\ 1 = 0$)

إذن $\ln x \leq 2\sqrt{x} - 2$

وبما أن $2\sqrt{x} - 2 \leq 2\sqrt{x}$

فإن $\ln x \leq 2\sqrt{x}$

- نستنتج أن لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

د)

- ليكن $x \in 1,+\infty$

لدينا حسب نتيجة السؤال 1) ج) : $0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

إذن : $0 \leq \ln x^{3} \leq 8x\sqrt{x}$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

إذن : $0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$

و منه : لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$

▷ لدينا لكل x من المجال $1,+\infty$ ، $0 \leq \frac{\ln x^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$

إذن حسب مبرهنة الدرك : $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^3}{x^2} = 0$

2) أ)

✓ الدالة G قابلة للاشتقاق على $0,+\infty$ (كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $0,+\infty$)

✓ ليكن $x \in 0,+\infty$

لدينا :

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)\right)' \\ &= x'\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)' \\ &= 1\times\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\times\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right) \\ &= -1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{2}{3}\sqrt{x}-1 \\ &= 2\sqrt{x}-2-\ln x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : $G'(x) = g(x)$ لكل x من المجال $0,+\infty$

○ وبالتالي G هي دالة أصلية للدالة g على $0,+\infty$

ب)

$$\begin{aligned} \int_1^4 g(x)\,dx &= \left[G(x)\right]_1^4 \\ &= G(4)-G(1) \\ &= 4\left(\frac{5}{3}-\ln 4\right)-1\left(\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{19}{3}-4\ln 4 \end{aligned}$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تصحيح المسألة

1)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right) = +\infty \qquad \triangleright$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} -x+\frac{5}{2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}-4 = -4 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right) = -\infty \qquad \triangleright$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} -x+\frac{5}{2} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-2}-4 = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

2) أ) لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-\left(-x+\frac{5}{2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right) = 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{2}e^{x-2} = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{e^x}{2e^2} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x-2}-4 = -4 \end{cases} \quad \text{لأن :}$$

إذن المستقيم Δ الذي معادلته $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحنى C بجوار $-\infty$

ب)

$\triangleright$ لنحل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $e^{x-2}-4=0$

لدينا :

$$\begin{aligned} e^{x-2}-4=0 &\Leftrightarrow e^{x-2}=4 \\ &\Leftrightarrow x-2=\ln 4 \\ &\Leftrightarrow x=2+\ln 4 \end{aligned}$$

إذن : $S=\{2+\ln 4\}$

$\triangleright$ لندرس الوضع النسبي للمنحنى C و المستقيم Δ

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا : $f\ x\ -\left(-x+\frac{5}{2}\right)=-\frac{1}{2}e^{x-2}\ \ e^{x-2}-4$

نعلم أن $e^{x-2}>0$ إذن إشارة $f\ x\ -\left(-x+\frac{5}{2}\right)$ هي إشارة $-\frac{1}{2}\ e^{x-2}-4$

x	$-\infty$	$2+ln4$	$+\infty$
$(-1/2)(Exp(x-2)-4)$	$+$	0	$-$

✓ على المجال $-\infty, 2+\ln 4$:

لدينا : $f\ x\ -\left(-x+\frac{5}{2}\right)\geq 0$

إذن المنحنى C يوجد فوق Δ

✓ و على المجال $2+\ln 4, +\infty$:

لدينا : $f\ x\ -\left(-x+\frac{5}{2}\right)\leq 0$

إذن المنحنى C يوجد تحت Δ

(3

✓ لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f\ x}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\ \ e^{x-2}-4}{x}\\ &= \lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\frac{e^{x-2}}{x}\ \ e^{x-2}-4\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}-1+\frac{5}{2x}=-1\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2}\frac{e^{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{2e^2}\frac{e^x}{x}=-\infty \quad \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty\right) \text{ لأن :}\\ \lim_{x\to+\infty}e^{x-2}-4=+\infty\end{cases}$$

✓ بما أن $\lim_{x\to+\infty}f\ x=-\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{f\ x}{x}=-\infty$

فإن المنحنى C يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

4) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\ e^{x-2}-4\right)' \\ &= -1-\frac{1}{2}\left(e^{x-2}\ '\ e^{x-2}-4+e^{x-2}\ e^{x-2}-4\ '\right) \\ &= -1-\frac{1}{2}\left(x-2\ 'e^{x-2}\ e^{x-2}-4+e^{x-2}\ x-2\ 'e^{x-2}\right) \\ &= -1-\frac{1}{2}\ e^{x-2}\ e^{x-2}-4+\ e^{x-2}\ ^2 \\ &= -\left(1+\frac{1}{2}\ 2\ e^{x-2}\ ^2-4e^{x-2}\right) \\ &= -\ 1+\ e^{x-2}\ ^2-2e^{x-2} \\ &= -\ e^{x-2}-1\ ^2 \end{aligned}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\ e^{x-2}-1\ ^2$

ب) جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘		$-\infty$

5) f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا :

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$f''(x) = -\left(e^{x-2}-1\right)^{2\,\prime}$$
$$= -2\left(e^{x-2}-1\right)'\left(e^{x-2}-1\right)$$
$$= -2\left(x-2\right)'e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right)$$
$$= -2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right)$$
$$= 2e^{x-2}-e^{x-2}+1$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = 2e^{x-2}-e^{x-2}+1$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند 2 فإن $A(2,2)$ نقطة انعطاف للمنحنى C $(f(2)=2)$

6)

✓ لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$ (كمجموع و جداء دوال متصلة على $\mathbb{R}$)

✓ بما أن $f'(x)\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ و $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ فإن f تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ ولدينا : $f(2+\ln 3) = -(2+\ln 3)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2+\ln 3-2}\left(e^{2+\ln 3-2}-4\right) = 2-\ln 3$

إذن $f(2+\ln 3)>0$

و لدينا : $f(2+\ln 4) = -(2+\ln 4)+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{2+\ln 4-2}\left(e^{2+\ln 4-2}-4\right) = \frac{1}{2}-\ln 4$

إذن $f(2+\ln 4)<0$

و منه $f(2+\ln 3)\times f(2+\ln 4)<0$

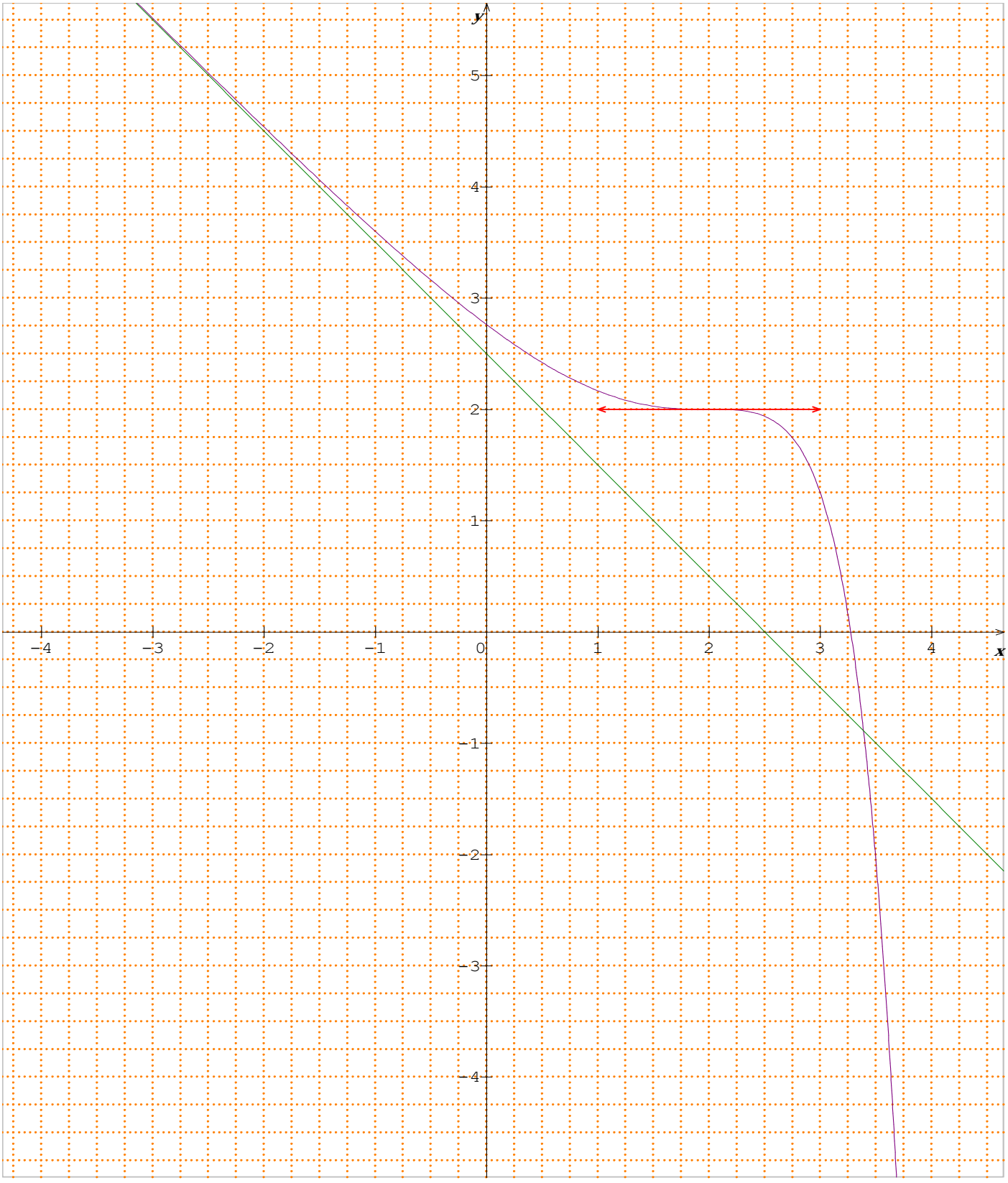
و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α بحيث

$2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

(7



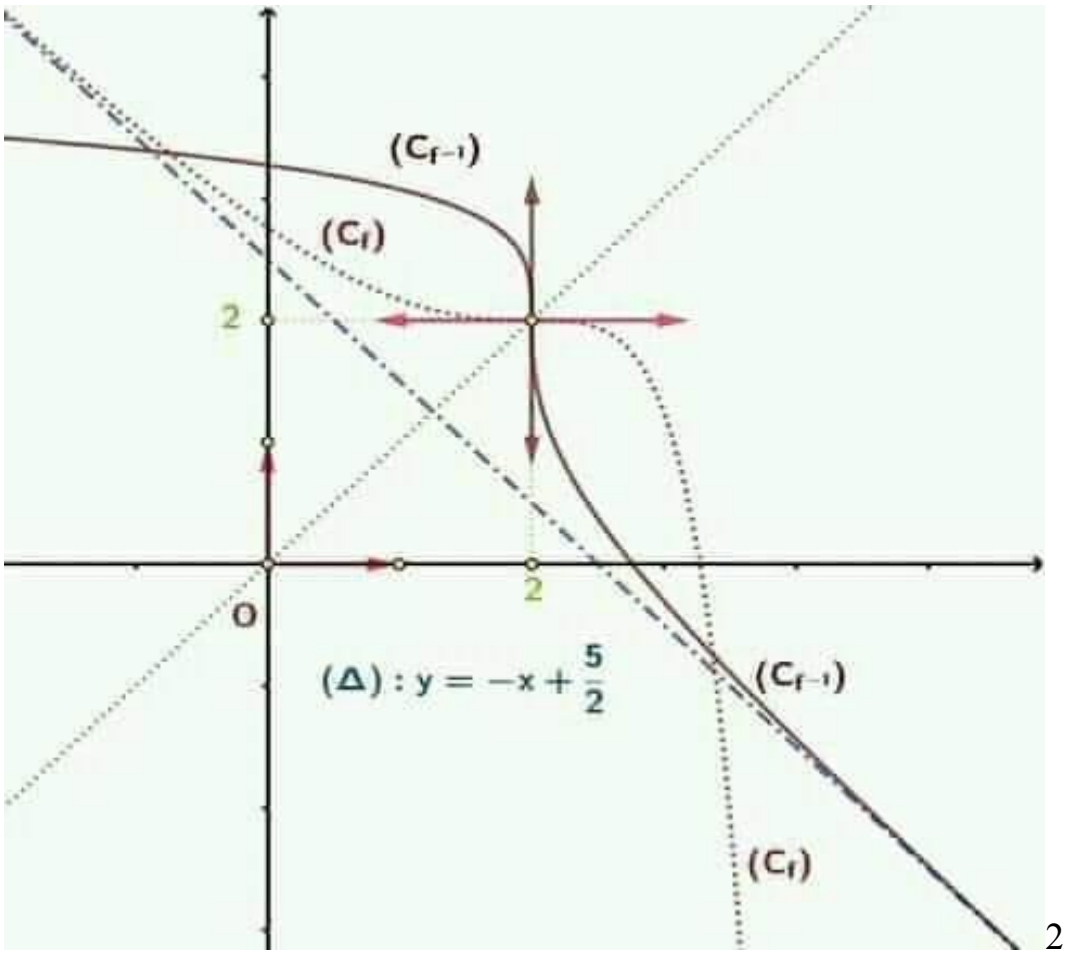
للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

8) أ) بما أن f متصلة و تناقصية قطعا على $\mathbb{R}$ فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو $\mathbb{R}$

حيث $J = f(\mathbb{R}) = f(-\infty,+\infty) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$

ب)



2

ج) $(f^{-1})'(2-\ln 3) = (f^{-1})'(f(2+\ln 3)) = \frac{1}{f'(2+\ln 3)} = \frac{1}{-4}$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع