هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

تصحيح وطني 2019

الدورة الاستدراكية - علوم تجريبية

التمرين الأول (3 نقاط) :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ، نعتبر النقط $A(1,2,2)$ و $B(3,-1,6)$ و $C(1,1,3)$	
1) أ) تحقق أن $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$	0.75
ب) استنتج أن $x-2y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)	0.5
2) نعتبر النقطتين $E(5,1,4)$ و $F(-1,1,12)$ و (S) مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$	0.75
بين أن المجموعة (S) فلكة مركزها هو النقطة $\Omega(2,1,8)$ و شعاعها $R=5$	
3) أ) أحسب $d(\Omega,(ABC))$ مسافة النقطة Ω عن المستوى (ABC)	0.5
ب) استنتج أن المستوى ABC يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $r=4$	0.5

التمرين الثاني (3 نقاط) :

1) أ) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$	0.75
ب) نضع $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ، أكتب a على الشكل المثلثي	0.5
2) نعتبر العدد العقدي $b=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ ، تحقق أن $b^2=i$	0.5
3) نضع $h=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$ ، بين أن $h^4+1=a$	0.5
4) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطة B التي لحقها b و R الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ) ليكن c لحق النقطة C صورة النقطة B بالدوران R ، بين أن $c=ib$	0.5
ب) استنتج طبيعة المثلث OBC	0.25

التمرين الثالث (3 نقاط) :

يحتوي صندوق على كرة واحدة حمراء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق . لتكن الأحداث التالية : A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون " و B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة " و C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "	
1) بين أن : $p(A)=\frac{1}{6}$ و $p(B)=\frac{8}{27}$	2

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

1	**2)** أحسب $p(C)$

المسألة (11 نقطة) :

	الجزء الأول:
	لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=2+8(\frac{x-2}{x})^2e^{x-4}$
	و C المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$)
	1) أ) تحقق أن $f(x)=2$ و أول النتيجة هندسيا $\lim\limits_{x\to-\infty}$
0.5	
0.5	ب) تحقق أن $f(x)=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا $\lim\limits_{x\to0}$
0.5	**2)** أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
0.5	ب) بين أن المنحنى C يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$
0.75	**3)** أ) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$
0.25	ب) تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$، $x^2-2x+4>0$
0.75	ج) بين أن f تناقصية قطعا على المجال $]0,2]$ و تزايدية قطعا على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $[2,+\infty[$
0.5	د) ضع جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$
1	**4)** أنشئ المنحنى C في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$
0.5	**5)** أ) تحقق أن الدالة $H:x\mapsto\frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $[2,4]$
0.25	ب) تحقق من أن $f(x)=2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$
0.5	ج) أحسب التكامل $\int_2^4 e^{x-4}dx$
0.75	د) أحسب ب cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى C و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=4$
	الجزء الثاني:
	1) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[2,4]$ بما يلي : $g(x)=8(x-2)e^{x-4}-x^2$
0.25	أ) أحسب $g(4)$
0.5	ب) تحقق أن لكل x من المجال $[2,4]$ ، $g(x)=-(x-4)^2e^{x-4}+x^2(e^{x-4}-1)$
0.5	ج) تحقق أن لكل x من المجال $[2,4]$ ، $e^{x-4}-1\leq0$ ثم استنتج أن لكل x من المجال $[2,4]$: $g(x)\leq0$
0.5	**2)** أ) تحقق أن لكل x من المجال $[2,4]$ ، $f(x)-x=\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$
0.25	ب) استنتج أن لكل x من المجال $[2,4]$، $f(x)\leq x$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

3) لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0=3$ و $u_{n+1}=f\ u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$	
أ) بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2\le u_n\le 4$	0.5
ب) حدد رتابة المتتالية u_n ، ثم استنتج أنها متقاربة	0.5
ج) أحسب نهاية المتتالية u_n	0.75

تصحيح التمرين الأول

1) أ) لدينا $\overrightarrow{AB}\ 2,-3,4$ و $\overrightarrow{AC}\ 0,-1,1$

إذن :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix}-3 & 4\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$= 1.\vec{i}-2.\vec{j}-2.\vec{k}$$

و بالتالي : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-2\vec{j}-2\vec{k}$

ب) لدينا : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\ 1,-2,-2$ متجهة منظمية للمستوى ABC

إذن معادلة ديكارتية للمستوى ABC تكتب على شكل : $1.x-2.y-2.z+d=0$

و لدينا : $A\ 1,2,2\in ABC$

إذن : $1.\ 1\ -2.\ 2\ -2.\ 2\ +d=0$

و منه : $d=7$

نستنتج أن $x-2y-2z+7=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى ABC

2) لدينا S مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF}=0$

إذن S هي الفلكة التي أحد أقطارها EF

و بالتالي : Ω مركز الفلكة هو منتصف القطعة EF و شعاعها R : $R=\dfrac{EF}{2}$

$$\begin{cases} x_\Omega=\dfrac{x_E+x_F}{2}=\dfrac{5+(-1)}{2}=2\\ y_\Omega=\dfrac{y_E+y_F}{2}=\dfrac{1+1}{2}=1\\ z_\Omega=\dfrac{z_E+z_F}{2}=\dfrac{4+12}{2}=8 \end{cases}$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

و $R=\frac{EF}{2}=\frac{\sqrt{-1-5^{\ 2}+1-1^{\ 2}+12-4^{\ 2}}}{2}=\frac{\sqrt{36+0+64}}{2}=\frac{10}{2}=5$

و منه : المجموعة S فلكة مركزها هو النقطة $\Omega\ 2,1,8$ و شعاعها $R=5$

3) أ) $d\ \Omega,\ ABC\ =\frac{|\ 2\ -2\ 1\ -2\ 8\ +7|}{\sqrt{1^{\ 2}+\ -2^{\ 2}+\ -2^{\ 2}}}=\frac{9}{\sqrt{9}}=3$

ب) بما أن $d\ \Omega,\ ABC\ <R$ فإن المستوى ABC يقطع الفلكة S وفق دائرة Γ شعاعها r

حيث : $r=\sqrt{R^2-\ d\ \Omega,\ ABC\ ^{\ 2}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

تصحيح التمرين الثاني

1) أ) لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-3z+3=0$

لدينا : $\Delta=\ -3^{\ 2}-4\ 1\ \ 3\ =-3$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين

$z=\frac{-\ -3\ -i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $z=\frac{-\ -3\ +i\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

و منه : $S=\left\{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ب) لدينا : $a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

معيار العدد a هو : $|a|=\left|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$

لنكتب العدد a على الشكل المثلثي:

$a=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

2) $b^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ 1+i\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ 1+i^{\ 2}=\frac{2}{4}\ 1+2i-1\ =\frac{4i}{4}=i$

3) حسب علاقة موافر :

$h^4=\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)^4=\cos\frac{4\pi}{12}+i\sin\frac{4\pi}{12}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

إذن : $h^4+1=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=a$

4) أ) لدينا : $\frac{\pi}{2}$ صورة النقطة B b بالدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{2}$ C c

إذن :

$$\begin{aligned} c-0 &= e^{i\frac{\pi}{2}}\ b-0 \\ c &= \left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right).b \end{aligned}$$

و منه : $c=ib$

ب) لدينا : $R\ B=C \Leftrightarrow \begin{cases} OB=OC \\ \overrightarrow{OB,OC}\equiv\frac{\pi}{2}\ 2\pi \end{cases}$

إذن المثلث OBC متساوي الساقين و قائم الزاوية في O

تصحيح التمرين الثالث

التجربة " نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال 3 كرات من الصندوق ."

ليكن Ω كون إمكانيات التجربة

لدينا : $card\Omega=6^3=216$

1) A " الكرات الثلاث المسحوبة لها نفس اللون "

RRR N NNوBBi

$$cardA=1^3+2^3+3^3=36$$

$$p\ A=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{36}{216}=\frac{1}{6}$$

B " لا توجد أي كرة بيضاء من بين الكرات المسحوبة "

$\overline{B}\overline{B}\overline{B}$

$$cardB=4^3=64$$

$$p\ B=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{64}{216}=\frac{8}{27}$$

2) C " توجد كرتان بيضاوان بالضبط من بين الكرات المسحوبة "

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$\begin{cases} BB\overline{B} \\ B\overline{B}B \\ \overline{B}BB \end{cases}$$

$$cardC = \frac{3!}{2!\times 1!}\ 2^2\times 4^1\ = 48$$

$$p\ C\ = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{48}{216} = \frac{2}{9}$$

تصحيح المسألة

الجزء الأول:

1) أ)

$$\lim_{x\to-\infty} f\ x\ = \lim_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = 2$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to-\infty} e^{x-4} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{e^4} = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=2$ بجوار $-\infty$

ب)

$$\lim_{x\to 0} f\ x\ = \lim_{x\to-\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = +\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to 0}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2\ ^2}{x^2} = +\infty \qquad \begin{cases} \lim_{x\to 0} x-2\ ^2 = 4 \\ \lim_{x\to 0} x^2 = 0^+ \end{cases} \\ \lim_{x\to 0} e^{x-4} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^4} = \frac{1}{e^4} \end{cases}$$

التأويل الهندسي: المنحنى C يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$

2) أ)

$$\lim_{x\to+\infty} f\ x\ = \lim_{x\to+\infty} 2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4} = +\infty$$

لأن :

$$\begin{cases} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x\to+\infty} e^{x-4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^4} = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$$

ب)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f\ x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\frac{e^{x-4}}{x} = +\infty$$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-4}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^4}\dfrac{e^x}{x}=+\infty \quad \left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty\right) \end{cases}$$ لأن :

التأويل الهندسي:

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

فإن : المنحنى C يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المقارب محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3) أ) الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $-\infty,0$ و $0,+\infty$

ليكن $x\in\mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2+8\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\ &= 0+8\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 e^{x-4}\right)' \\ &= 8\left(\left(\left(\frac{x-2}{x}\right)^2\right)' e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 (e^{x-4})'\right) \\ &= 8\left(2\left(\frac{x-2}{x}\right)'\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 (x-4)'e^{x-4}\right) \\ &= 8\left(2\times\frac{2}{x^2}\left(\frac{x-2}{x}\right)e^{x-4}+\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}\right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4}{x}+x-2\right) \\ &= \frac{8(x-2)}{x^2}e^{x-4}\left(\frac{4+x^2-2x}{x}\right) \end{aligned}$$

و منه لكل x من $\mathbb{R}^*$، $f'(x)=\dfrac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3}$

ب) ليكن $x\in\mathbb{R}$

لدينا : $x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=(x-1)^2+3$

إذن من الواضح أن : لكل x من $\mathbb{R}$، $x^2-2x+4>0$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

ج) ليكن $x \in \mathbb{R}^*$:

لدينا $f'(x) = \frac{8(x-2)(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^3} = \frac{8(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^2} \times \frac{x-2}{x}$

بما أن : $\frac{8(x^2-2x+4)e^{x-4}}{x^2} > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\frac{x-2}{x}$

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$	
x	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-2}{x}$	$+$	‖	$-$	0	$+$	

✓ على المجال $]0,2]$: لدينا $f'(x) \leq 0$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

إذن f تناقصية قطعا

✓ على المجال $[2,+\infty[$: لدينا $f'(x) \geq 0$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

إذن f تزايدية قطعا

✓ على المجال $]-\infty,0[$: لدينا $f'(x) > 0$

إذن f تزايدية قطعا

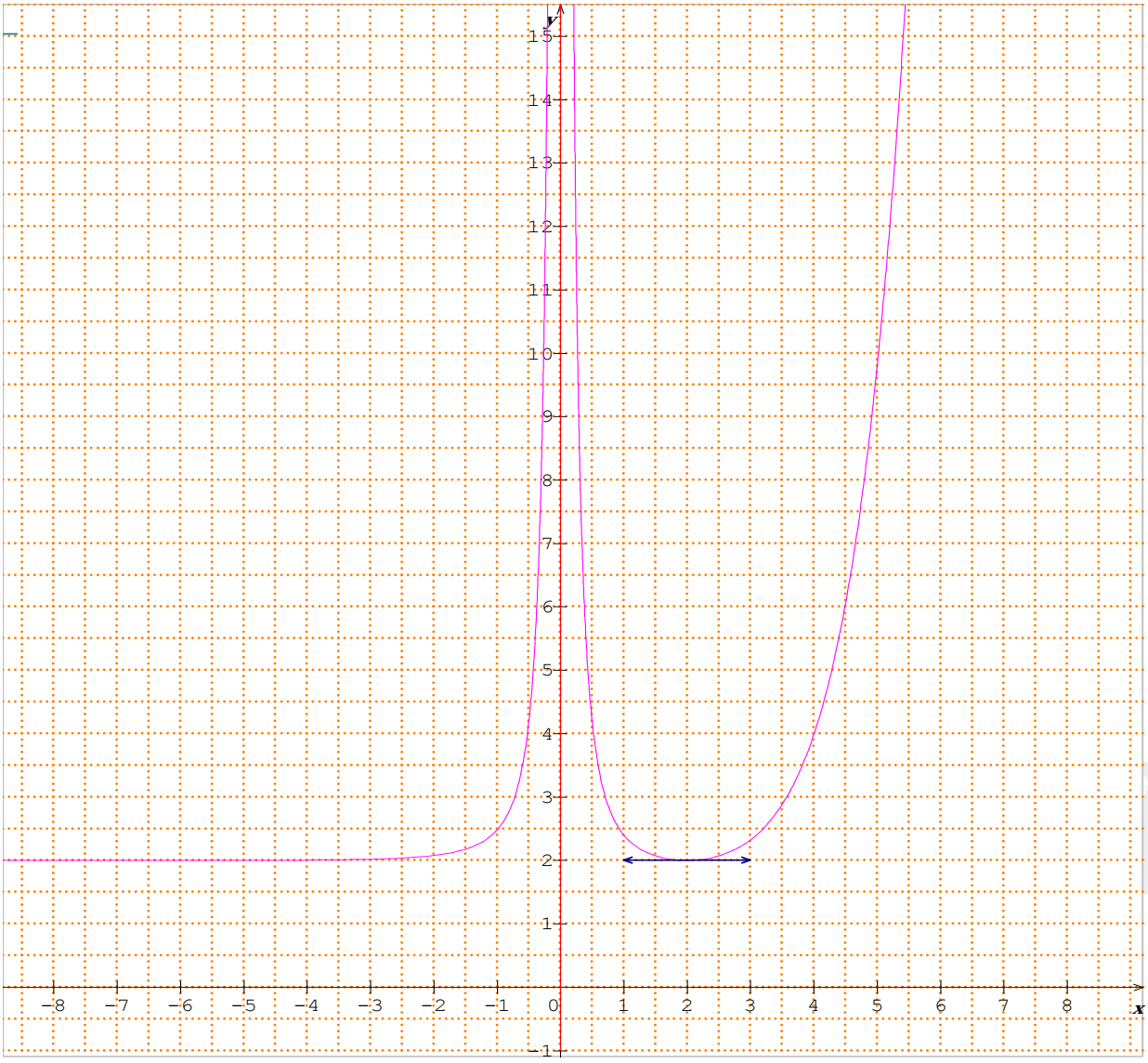
د) جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}^*$

x	$-\infty$		0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	2 ↗	$+\infty$	‖ $+\infty$	↘	2	↗ $+\infty$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

4)



5) أ)

✓ الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ قابلة للاشتقاق على المجال $2,4$ كجداء دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $2,4$

✓ ليكن $x \in 2,4$

لدينا

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

$$\begin{aligned} H'(x) &= \left(\frac{1}{x}e^{x-4}\right)' \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)' e^{x-4} + \frac{1}{x}\left(e^{x-4}\right)' \\ &= \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}(x-4)' e^{x-4} \\ &= \frac{-1}{x^2}e^{x-4} + \frac{1}{x}e^{x-4} \\ &= \left(\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^{x-4} \\ &= \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^{x-4} \end{aligned}$$

إذن $\forall x \in]2,4[\quad H'(x) = h(x)$

وبالتالي : الدالة $H : x \mapsto \frac{1}{x}e^{x-4}$ دالة أصلية للدالة $h : x \mapsto \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}$ على المجال $]2,4[$

ب)

$$\begin{aligned} 2+8e^{x-4}-32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4} &= 2+8e^{x-4}\left(1-4\frac{x-1}{x^2}\right) \\ &= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x^2-4x+4}{x^2}\right) \\ &= 2+8e^{x-4}\left(\frac{(x-2)^2}{x^2}\right) \\ &= 2+8e^{x-4}\left(\frac{x-2}{x}\right)^2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ج)

$$\begin{aligned} \int_2^4 e^{x-4}dx &= \int_2^4 (x-4)' e^{x-4}dx \\ &= \left[e^{x-4}\right]_2^4 \\ &= e^0 - e^{-2} \\ &= 1-\frac{1}{e^2} \\ &= \frac{e^2-1}{e^2} \end{aligned}$$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

د)

$$\begin{aligned}
A &= \int_2^4 |f(x)|\,dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \\
&= \int_2^4 f(x)\,dx \times 1cm \times 1cm \qquad \forall x \in [2;4] \quad f(x) \geq 0 \\
&= \int_2^4 \left(2 + 8e^{x-4} - 32\frac{x-1}{x^2}e^{x-4}\right)dx.\text{cm}^2 \\
&= \left(\int_2^4 2dx + 8\int_2^4 e^{x-4}dx - 32\int_2^4 \frac{x-1}{x^2}e^{x-4}dx\right).cm^2 \\
&= \left(2x\,]_2^4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32[H(x)]_2^4\right).cm^2 \\
&= \left(8 - 4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 32\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2e^2}\right)\right).cm^2 \\
&= \left(4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} - 8 + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(-4 + 8\frac{e^2-1}{e^2} + \frac{16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \left(\frac{-4e^2 + 8e^2 - 8 + 16}{e^2}\right).cm^2 \\
&= \frac{4e^2+8}{e^2}.cm^2
\end{aligned}$$

<u>الجزء الثاني:</u>

1) أ)

$$\begin{aligned}
g(4) &= 8 \times 2e^0 - (4-2)^2 \\
&= 16 - 16 \\
&= 0
\end{aligned}$$

ب)

ليكن $x \in]2,4[$

لدينا :

$$\begin{aligned}
-x^2 + 8x - 16\ e^{x-4} + x^2 e^{x-4} - x^2 &= -x^2 + 8x - 16 + x^2\ e^{x-4} - x^2 \\
&= 8(x-2)\ e^{x-4} - x^2 \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

Talamid.ma : هذا الملف تم تحميله من موقع

إذن : لكل x من المجال $2,4$ ، $g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1)$

ج)

ليكن $x \in 2,4$

✓ لدينا $2 \leq x \leq 4$

إذن $-2 \leq x-4 \leq 0$

إذن $e^{x-4} \leq e^0$

إذن $e^{x-4} \leq 1$

و منه لكل x من المجال $2,4$ ، $e^{x-4}-1 \leq 0$

✓ لدينا $g(x) = -(x-4)^2 e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1)$

بما أن $-(x-4)^2 e^{x-4} \leq 0$ و $x^2(e^{x-4}-1) \leq 0$

فإن $-(x-4)^2 e^{x-4} + x^2(e^{x-4}-1) \leq 0$

و منه لكل x من المجال $2,4$: $g(x) \leq 0$

2) أ) ليكن $x \in 2,4$

لدينا

$$\begin{aligned} f(x)-x &= 2+8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}-x \\ &= 8\frac{(x-2)^2}{x^2}e^{x-4}-(x-2) \\ &= \frac{x-2}{x^2}\left(8(x-2)e^{x-4}-x^2\right) \\ &= \frac{x-2}{x^2}g(x) \end{aligned}$$

إذن لكل x من المجال $2,4$ ، $f(x)-x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

ب) ليكن $x \in 2,4$

لدينا $f(x)-x = \left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x)$

نعلم أن $x^2 > 0$ و $x-2 \geq 0$ و $g(x) \leq 0$

إذن $\left(\frac{x-2}{x^2}\right)g(x) \leq 0$

إذن $f(x)-x \leq 0$

Talamid.ma : للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

و منه لكل x من المجال $2,4$ ، $f\ x \leq x$

3) أ) لنبين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 4$

✓ من أجل $n=0$:

لدينا $u_0 = 3$

إذن $2 \leq u_0 \leq 4$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

▷ نفترض أن : $2 \leq u_n \leq 4$

▷ و نبين أن : $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

حسب الافتراض لدينا $2 \leq u_n \leq 4$

و بما أن f متصلة و تزايدية على المجال $2,4$

فإن $f\ 2 \leq f\ u_n \leq f\ 4$

إذن $2 \leq u_{n+1} \leq 4$

✓ نستنتج : أن لكل n من $\mathbb{N}$ $2 \leq u_n \leq 4$

ب)

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$

نعلم أن لكل x من المجال $2,4$ ، $f\ x \leq x$

و بما أن $2 \leq u_n \leq 4$ فإن $f\ u_n \leq u_n$

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n$

و منه المتتالية u_n تناقصية

✓ بما أن u_n تناقصية و مصغورة بالعدد 2 فإن u_n متقاربة

ج) لدينا $u_0 = 3 \in 2;4$ و $u_{n+1} = f\ u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

✓ f متصلة على المجال $2,4$

✓ $f\ 2,4 = \left[f\ 2 ; f\ 4 \right] = 2;4$

✓ u_n متقاربة

إذن نهاية المتتالية u_n هي حل للمعادلة $f\ x = x$

$$f\ x = x \Leftrightarrow x - 2\ g\ x = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \quad x \quad g \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x = 2 \quad x \quad = \alpha$$

بما أن u_n تناقصية فإن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n \leq u_0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

إذن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n \leq 3$

إذن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq 3$

و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$



للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma