هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

منـــارة الـــفـــردوس نيابة الخميسات	تصحيح فرض محروس رقم 01 الدورة الأولـى : 2010/2009	الأولـى بالـك علوم رياضية ذ : عبدالله بن لـختير

- التمرين رقم 01:

1)- إذا كانت s و t عبارتين ، فإن : $\neg(s\Rightarrow t)\Leftrightarrow(s \text{ و } \neg t)$.

إذن نفي العبارة : p :« $(\forall x\in\mathbb{R}), x^2\in\mathbb{Q}\Rightarrow x\in\mathbb{Q}$ » هي العبارة :

$\neg p$:« $(\exists x\in\mathbb{R})/\ x^2\in\mathbb{Q}$ و $x\notin\mathbb{Q}$ »

2)- نبين أن $\neg p$ عبارة صحيحة .

نأخذ $x=\sqrt{2}$ لدينا : $x^2=2\in\mathbb{Q}$ و نعلم أن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ ، إذن $\neg p$ عبارة صحيحة .

و بالتالي فإن p عبارة خاطئة .

- التمرين رقم 02: $(02\,pts)$

← تكون المعادلة (E) معرفة إذا كان $x\in[1;+\infty[$ و $y\in[4;+\infty[$.

و في هذه الحالة ، لدينا :

$$(E)\Leftrightarrow x-2\sqrt{x-1}+y-4\sqrt{y-4}=0$$
$$\Leftrightarrow x-1-2\sqrt{x-1}+1+y-4-4\sqrt{y-4}+4=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}\right)^2-2\sqrt{x-1}+1^2+\left(\sqrt{y-4}\right)^2-2\times2\times\sqrt{y-4}+2^2=0$$
$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-4}-2\right)^2=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}-1=0\\ \sqrt{y-4}-2\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=8\end{cases}$$

و بالتالي ، فإن : $S=\{(2;8)\}$.

- التمرين رقم 03:

لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $P(n)=n^2+7n+12$.

1)- لكل n من $\mathbb{N}$ ، لدينا :

$$(n+4)^2-P(n)=\left(n^2+8n+16\right)-\left(n^2+7n+12\right)$$
$$=n+4\geq4$$

و

$$P(n)-(n+3)^2=\left(n^2+7n+12\right)-\left(n^2+6n+9\right)$$
$$=n+3\geq3$$

← إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}),(n+4)^2>P(n)$ و $(\forall n\in\mathbb{N});P(n)>(n+3)^2$

و بالتالي ، فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}),(n+3)^2<P(n)<(n+4)^2$.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

2)- نبين بالخلف أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$.

- لنفترض أنه : $(\exists n\in\mathbb{N}),\sqrt{P(n)}\in\mathbb{N}$

إذن : $(\exists a\in\mathbb{N})/\sqrt{P(n)}=a$ ، بمعنى أنه : $(\exists a\in\mathbb{N})/P(n)=a^2$

و باستعمال نتيجة السؤال1)- نستنتج أنه : $(\exists a\in\mathbb{N})/(n+3)^2<a^2<(n+4)^2$.

و هذا تناقض ، لأنه لا يوجد مربع كامل بين المربعين المتتابعين $(n+3)^2$ و $(n+4)^2$. إذن إفتراضنا خاطىء

و بالتالي فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\sqrt{P(n)}\notin\mathbb{N}$.

- التمرين رقم 04:

- نبين بفصل الحالات : $x\le 0$ و $x\ge 1$ و $0<x<1$ أن :

$$(\forall x\in\mathbb{R}),x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}>0$$.

لكل x من $\mathbb{R}$ ، نضع : $P(x)=x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+\frac{3}{4}$.

- في حالة $x\le 0$ ، لدينا :

$x^6+x^4+x^2\ge 0$ و $-(x^5+x^3+x)\ge 0$ (لأن : $x^5+x^3+x\le 0$)

إذن : $x^6+x^4+x^2-(x^5+x^3+x)\ge 0$.

و منه فإن : $(\forall x\in\mathbb{R}^-),P(x)\ge\frac{3}{4}$.

- في حالة $x\ge 1$ ، لدينا :

$x^6-x^5=x^5(x-1)\ge 0$ و $x^4-x^3=x^3(x-1)\ge 0$ و $x^2-x=x(x-1)\ge 0$

إذن : $(\forall x\in[1;+\infty[),P(x)\ge\frac{3}{4}$.

- و في حالة $0<x<1$ ، لدينا :

$$P(x)=\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(x^6-x^3+\frac{1}{4}\right)+(x^4-x^5)+\frac{1}{4}$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2+x^4(1-x)+\frac{1}{4}$$

و بما أن : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$ و $\left(x^3-\frac{1}{2}\right)^2\ge 0$ و $x^4(1-x)>0$ ، فإن : $(\forall x\in]0;1[),P(x)>\frac{1}{4}$.

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R}),P(x)>\frac{1}{4}$ ، و بالتالي فإن : $(\forall x\in\mathbb{R}),P(x)>0$.

- التمرين رقم 05:

- لكل a و b من $\mathbb{R}^{*+}$ ، لدينا :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-ab=\frac{(a+b)^2-4ab}{4}=\frac{(a-b)^2}{4}$$

و بما أن $a\neq b$ ، فإن : $(a-b)^2>0$. إذن : $ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

- إستنتاج :

إذا كانت a و b و c و d أعدادا حقيقية موجبة قطعا و مختلفة فيما بينها مثنى مثنى ، فإن :

$$ab<\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ و } cd<\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 .$$

و بضرب طرفي المتفاوتتين السابقتين ، نحصل على : $abcd<\frac{\left[(a+b)\times(c+d)\right]^2}{4}$.

و بما أن : $(a+b)\times(c+d)\le\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^2$

فإن : $abcd<\frac{\left[(a+b)\times(c+d)\right]^2}{4}\le\frac{1}{4^2}\left(\frac{(a+b)+(c+d)}{2}\right)^4$.

و بذلك يتحقق المطلوب .

- التمرين رقم 06:

1)- لكل x و y من $\mathbb{R}^{*+}$ بحيث $x^2+y^2=1$ ، لدينا :

$$(x+y)^2-2=(x+y)^2-2\left(x^2+y^2\right)=-(x-y)^2\le 0$$

إذن : $(x+y)^2\le 2$ ، بمعنى أن : $x+y\le\sqrt{2}$.

- و من جهة أخرى :

لدينا : $\left(x^2<x^2+y^2=1\right)\Rightarrow 0<x<1$ و $\left(y^2<x^2+y^2=1\right)\Rightarrow 0<y<1$

و بما أن : $(x+y)-1=(x+y)-\left(x^2+y^2\right)=x(1-x)+y(1-y)$

فإن : $(x+y)-1>0$.

إذن : $\forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}^{*+}\right)^2; x^2+y^2=1\Rightarrow\left(1<x+y\le\sqrt{2}\right)$.

2)- ليكن x و y من $\mathbb{R}^{*-}$ بحيث $x^2+y^2=1$.

بما أن : $-x\in\mathbb{R}^{*+}$ و $-y\in\mathbb{R}^{*+}$ و $(-x)^2+(-y)^2=x^2+y^2=1$

فإن : $1<(-x)+(-y)\le\sqrt{2}$

إذن : $-\sqrt{2}\le x+y<-1$.

- التمرين رقم 07:

1)- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و n عدد فردي .

نعلم أنه يوجد $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{0;1;2;3\}$ بحيث : $n=4k+r$.

و بما أن n فردي فإن $r\notin\{0;2\}$ (إذ لو كان $r\in\{0;2\}$ لكان n زوجيا و هذا غير ممكن)

إذن : $n=4k+r$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{1;3\}$.

2)- للبرهان بمضاد العكس على أن :

(n عدد زوجي) $\Rightarrow$ (n^2-1 لا يقبل القسمة على 8)

نبين أن : (n^2-1 يقبل القسمة على 8) $\Rightarrow$ (n عدد فردي) .

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

- إذا كان n عددا فرديا ، فإن : $n=4k+r$ حيث $k\in\mathbb{N}$ و $r\in\{1;3\}$

في حالة $r=1$ ، لدينا :

$$n^2-1=(4k+1)^2-1=4k\times(4k+2)=8k(2k+1)$$

إذن n^2-1 يقبل القسمة على 8 .

و في حالة $r=3$ ، لدينا :

$$n^2-1=(4k+3)^2-1=(4k+2)\times(4k+4)=8(k+1)(2k+1)$$

إذن n^2-1 يقبل القسمة على 8 .

و بالتالي ، فإن : (n^2-1 يقبل القسمة على 8) $\Rightarrow$ (n عدد فردي) .

- التمرين رقم 08:

1)- نبين بالترجع أن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\dfrac{n\left(n^2+5\right)}{6}\in\mathbb{N}$.

- بالنسبة ل $n=0$ ، لدينا : $\dfrac{0\times\left(0^2+5\right)}{6}=0\in\mathbb{N}$.

- ليكن n من $\mathbb{N}^*$ بحيث $\dfrac{n\left(n^2+5\right)}{6}\in\mathbb{N}$ (إفتراض الترجع) ، لدينا :

$$\frac{(n+1)\left[(n+1)^2+5\right]}{6}=\frac{(n+1)\left[\left(n^2+5\right)+(2n+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{n\left(n^2+5\right)+\left[\left(n^2+5\right)+(n+1)(2n+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{n\left(n^2+5\right)}{6}+\frac{3n^2+3n+6}{6}$$

$$=\frac{n\left(n^2+5\right)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}+1$$

و بما أن : $\dfrac{n(n+1)}{2}\in\mathbb{N}$ و $\dfrac{n\left(n^2+5\right)}{6}\in\mathbb{N}$ (حسب إفتراض الترجع)

فإن : $\dfrac{(n+1)\left[(n+1)^2+5\right]}{6}\in\mathbb{N}$.

و بالتالي فإن : $(\forall n\in\mathbb{N}),\dfrac{n\left(n^2+5\right)}{6}\in\mathbb{N}$.

2)- نبين الآن بالترجع أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right),\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{4\times5^{n+1}-(5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

- من أجل $n=1$ ، لدينا : $\dfrac{4\times5^{1+1}-(5+1)4^{1+1}}{5^1}=\dfrac{100-96}{5}=\dfrac{4}{5}$ و $\sum_{k=1}^{1}k\left(\frac{4}{5}\right)^k=\frac{4}{5}$

إذن العلاقة السابقة محققة من أجل $n=1$.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

لنفترض أن : $\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4\times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$ حيث $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

و لنبين أن : $\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4\times 5^{(n+1)+1} - (5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}$ (؟؟؟؟) .

لدينا : $\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k + (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

و باستعمال إفتراض الترجع ، نحصل على :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4\times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n} + (n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

إذن :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} k\left(\frac{4}{5}\right)^k &= \frac{5\left[4\times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}\right] + (n+1)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\
&= \frac{4\times 5^{(n+1)+1} + \left[(n+1) - 5(5+n)\right]4^{n+1}}{5^{n+1}} \\
&= \frac{4\times 5^{(n+1)+1} - (24+4n)4^{n+1}}{5^{n+1}} \\
&= \frac{4\times 5^{(n+1)+1} - (6+n)4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}} \\
&= \frac{4\times 5^{(n+1)+1} - (5+(n+1))4^{(n+1)+1}}{5^{n+1}}
\end{aligned}$$

و بالتالي فإن : $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right), \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{4}{5}\right)^k = \frac{4\times 5^{n+1} - (5+n)4^{n+1}}{5^n}$.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma