هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 1 بكالوريا علوم رياضية	مبادئ في المنطق حلول مقترحة	استعدادا لاجتياز فروضك

فرض تجريبي من اقتراح أذ سمير لخريسي ـ مدة الانجاز 3 ساعات

تمرين 1 :

1

$\neg(P_1): \exists (x,y)\in IR^2 \quad x^2+y^2=1$ و $|xy|>\frac{1}{2}$

$\neg(P_2): \forall a\in IN\ \exists x\in Q \quad x^2\le a$

$\neg(P_3): \exists n\in IN \quad (n+n^{2013})\ est\ un\ nombre\ impaire$

$\neg(P_4): \exists n\in IN^* \ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}\ge 2\sqrt{n}$

$\neg(P_5): \exists y\in IR\ \forall x\in IR \quad x^2-yx+1\ne 0$

2

- بأخذنا : $x=0$ نجد أن نفي العبارة (P_2) صحيحة لأن : $\forall a\in IN\ a\ge 0=0^2$ ، بمعنى أن (P_2) عبارة خاطئة
- لنبين أن العبارة (P_3) صحيحة، و ذلك باستعمال البرهان بفصل الحلات .

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا :

إذا كان n عددا زوجيا فإن: n^{2013} عدد زوجي منه $n+n^{2013}$ عدد زوجي

إذا كان n عددا فرديا فإن: n^{2013} عدد فردي منه $n+n^{2013}$ عدد زوجي

بالتالي : لكل عدد صحيح طبيعي n $n+n^{2013}$ عدد زوجي

3

- لدينا لكل $(x,y)\in IR^2$:

$$x^2+y^2=1\Rightarrow x^2+y^2-2|xy|=1-2|xy|\Rightarrow (|x|-|y|)^2=1-2|xy|\Rightarrow 1-2|xy|\ge 0\Rightarrow |xy|\le\frac{1}{2}$$

بالتالي العبارة (P_1) صحيحة

- لنبرهن بالترجع على صحة العبارة (P_4)

بالنسبة لـ $n=1$ لدينا: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}=1$ و $2\sqrt{n}=2$ إذن العبارة صحيحة $(1<2)$

نفترض أن $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$ ونبين أن : $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

لدينا:

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{\sqrt{4n^2+4n+1}}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{\sqrt{4n^2+4n+1}+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{2n+1+1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{2(n+1)}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}$$

و هذا ينهي البرهان.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

- لنبرهن على خطأ العبارة (P_5) أي لنبرهن على صحة نفيها.

نعتبر المعادلة $x^2 - yx + 1 = 0$ ذات المجهول x ، لدينا : $\Delta = x^2 - 4$

إذن بأخذنا : $y = 0$ فإننا نجد أن $\Delta < 0$ أي أن هذه المعادلة ($x^2 + 1 = 0$) لا تقبل حلولا في IR

بمعنى : $\forall x \in IR \quad x^2 + 1 \neq 0$ مما يؤكد صحة نفي العبارة (P_5)، بالتالي فـ (P_5) عبارة خاطئة.

تمرين 2 :

1

نفترض أن: $\sqrt{2} \in Q$ إذن : $\exists (a,b) \in IN \times IN^* \quad \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$

$$\begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} \end{cases} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \Rightarrow a^2 \text{ un nombre paire} \Rightarrow a \text{ un nombre paire}$$

منه:

$$\Rightarrow \exists k \in IN / a = 2k \Rightarrow 2b^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 2k^2 \Rightarrow b^2 \text{ un nombre paire} \Rightarrow b \text{ un nombre paire}$$

نستنتج إذن أن 2 قاسم مشترك لـ a و b وهذا يناقض $a \wedge b = 1$

إذن الافتراض خاطئ و منه: $\sqrt{2} \notin Q$

نضع: $\alpha = 2\sqrt{2} - \sqrt{7}$ نفترض أن: $\alpha \in Q$ ، منه: $\exists (a,b) \in IN \times IN^* \quad \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ \alpha = \dfrac{a}{b} \end{cases}$

لدينا: $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{2\sqrt{2} - \sqrt{7}} = \dfrac{2\sqrt{2} + \sqrt{7}}{8 - 7} = 2\sqrt{2} + \sqrt{7}$

منه: $\dfrac{1}{\alpha} + \alpha = 4\sqrt{2}$ منه: $\dfrac{1}{4\alpha} + \dfrac{\alpha}{4} = \sqrt{2}$ منه : $\dfrac{b}{4a} + \dfrac{a}{4b} = \sqrt{2}$ منه $\dfrac{b^2 + a^2}{4ab} = \sqrt{2}$ $\sqrt{2} \in Q$

وهذا غير ممكن حسب النتيجة السابقة.

2

لدينا لكل $(x,y) \in Q^2$

- من جهة : $x = y = 0 \Rightarrow x + y\sqrt{2} = 0 + 0\sqrt{2} = 0$
- و من جهة أخرى نبين أن: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

لدينا: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -y\sqrt{2}$

نستنتج إذن أن : x و y منعدمان معا أو غير منعدمين معا

إذا افترضنا أنهما غير منعدمين معا فسنستنتج أن : $\sqrt{2} = \dfrac{-x}{y}$ وبما أن خارج عددين جذريين غير منعدمين

هو عدد جذري ، فسنستنتج أن : $\sqrt{2} \in Q$ وهذا غير ممكن حسب السؤال السابق

إذن نستنتج أن x و y منعدمان معا، منه: $x + y\sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = y = 0$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

3	لدينا، لكل $(x,y)\in IR^2$: $x+y+1=2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}\right) \Rightarrow x+y+1=2\sqrt{x}+2\sqrt{y-1} \Rightarrow x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y-1}=0$ $\Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2+y-1-2\sqrt{y-1}+1=0 \Rightarrow \left(\sqrt{x}-1\right)^2+\left(\sqrt{y-1}-1\right)^2=0$ $\Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}-1=0\\ \sqrt{y-1}-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=1\\ \sqrt{y-1}=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$
4	بالنسبة لـ $n=0$ العبارة المطلوبة صحيحة لأن 0 مضاعف للعدد 6 نفترض أن $n\left(n^2+5\right)$ مضاعف لـ 6 ونبرهن أن $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ مضاعف لـ 6 لدينا: $n\left(n^2+5\right)$ مضاعف لـ 6، إذن: $\exists k\in IN\ /\ n\left(n^2+5\right)=6k$ ولدينا: $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)=(n+1)\left(n^2+2n+6\right)=n^3+2n^2+6n+n^2+2n+6=n^3+3n^2+8n+6$ $=n^3+5n+3n^2+3n+6=6k+3n(n+1)+6$ وبما أن $n(n+1)$ عدد زوجي (جذاء عددين متتابعين هو عدد زوجي) فإن: $\exists p\in IN\ /\ n(n+1)=2p$ منه: $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)=6k+6p+6=6(k+p+1)$ وبما أن: $k+p+1\in IN$ فإن $(n+1)\left((n+1)^2+5\right)$ مضاعف لـ 6
	تمرين 3 :
1	في المجال : $I=[-1;1]$ لدينا: $x^2-1\le 0$ ومنه: $\left\|x^2-1\right|+2x-3=0 \Leftrightarrow 1-x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+2=0$ وبما أن: $\Delta=4-8=-4<0$ فإن: $S_1=\phi$ وفي المجال : $J=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ لدينا: $x^2-1>0$ ومنه: $\left\|x^2-1\right|+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2-1+2x-3=0 \Leftrightarrow x^2+2x-4=0$ وبما أن: $\Delta=4+16=20$ فإن: $x_1=\frac{-2+\sqrt{20}}{2}=-1+\sqrt{5}\in J$ و $x_2=\frac{-2-\sqrt{20}}{2}=-1-\sqrt{5}\in J$ خلاصة: $S=S_1\cup S_2=\left\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\right\}$ ، $S_2=\left\{-1+\sqrt{5};-1-\sqrt{5}\right\}$
2	$D=\{x\in IR\ /\ 3x-6\ge 0\ et\ x-1\ge 0\}=\{x\in IR\ /\ x\ge 2\ et\ x\ge 1\}=[2;+\infty[$ إذن لكل $x\in[2;+\infty[$ لدينا: $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\le 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x-6}\le 1+\sqrt{x-1} \Leftrightarrow \sqrt{3x-6}^2\le\left(1+\sqrt{x-1}\right)^2 \Leftrightarrow 3x-6\le 1+2\sqrt{x-1}+x-1$ $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\le 1 \Leftrightarrow 2x-6\le 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x-3\le\sqrt{x-1}$ إذا كان: $x-3\le 0$ أي $2\le x\le 3$ فالمتراجحة صحيحة ، منه: $S_1=[2;3]$ إذا كان $x-3>0$ فإن: $\sqrt{3x-6}-\sqrt{x-1}\le 1 \Leftrightarrow x^2-6x+9\le x-1 \Leftrightarrow x^2-7x+10\le 0$ $\Delta=49-40=9$ ، بعد إنشاء جدول الإشارات نجد أن: $S_2=[2;5]\cap]3;+\infty[=]3;5]$ خلاصة: $S=S_1\cup S_2=[2;5]$
3	لدينا: $\begin{cases}2x+3y=-1\\ \|x+y\|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=-1\\ x+y=1\ \ ou\ \ x-y=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y=-1\\ x+y=1\end{cases} ou \begin{cases}2x+3y=-1\\ x+y=-1\end{cases}$ وباستعمال المحددة أو طريقة التعويض أو التأليفة الخطية نجد: $\begin{cases}2x+3y=-1\\ \|x+y\|=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\ y=-3\end{cases} ou \begin{cases}x=-2\\ y=1\end{cases}$ بالتالي: $S=\{(4;3);(-2;1)\}$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

4

لدينا:

$$\forall a>0 \quad \forall b>0 \quad \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)-4=ab+1+1+\frac{1}{ab}-4=ab-2+\frac{1}{ab}=\frac{(ab)^2-2ab+1}{ab}=\frac{(ab-1)^2}{ab}\geq 0$$

بالتالي: $\forall a>0 \quad \forall b>0 \quad \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\geq 4$

تمرين 4 : نفترض أن الحدودية : $p(x)=x^3+ax+b$ تقبل على الأقل حلا جذريا

إذن: $\begin{cases}\left(\frac{p}{q}\right)^3+a\left(\frac{p}{q}\right)+b=0\\ p\wedge q=1\end{cases}$ / $\exists (p,q)\in Z\times IN^*$ منه: $p^3+apq^2+bq^3=0$

بما أن : $p\wedge q=1$ فإن p و q فرديان معا أو أحدهما فردي و الأخر زوجي

إذا كانا فرديان معا فإن: p^3 و apq^2 و bq^3 أعداد فردية مجموعها فردي

إذا كان أحدهما زوجي و الآخر فردي (و بدراسة الحالتين معا) نجد أن apq^2 عدد زوجي و p^3+bq^3 عدد فردي

في كل الحلات نجد أن $p^3+apq^2+bq^3$ عدد فردي و هذا غير ممكن لأن الصفر عدد زوجي

تمرين 5 :

لدينا a و b و c تمثل أطوال أضلاع مثلث إذن: $a>0$ و $b>0$ و $c>0$ و $a+b>c$ و $a+c>b$ و $b+c>a$

منه : $\frac{1}{a+b}>0$ و $\frac{1}{b+c}>0$ و $\frac{1}{c+a}>0$

و $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}\geq\frac{2}{a+b+c}>\frac{2}{b+c+b+c}\geq\frac{2}{2(b+c)}\geq\frac{1}{b+c}$

لأن: $a+b<a+b+c$ و $a+c<a+b+c$ ($a<b+c$ و

و بنفس الطريقة نبين أن: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+c}$ و $\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}>\frac{1}{a+b}$ ، وهذا ينهي البرهان.

- هذا الفرض المقترح يتضمن تمارين أكثر من التمارين المفترضة في فرض فعلي كما و كيفا (من حيث الصعوبة)، لذلك اقترحت 3 ساعات كوقت افتراضي لإنجازه، الهدف من ذلك التعود على مثل هذه الوضعيات و أيضا محاولة الإحاطة بجل مفاهيم الدرس الواجب الالمام بها.
- عدم التمكن من إنجاز بعض أو جل هذه التمارين لا يعني مطلقا ضعفا أو نقصا في المستوى لكنه يعني ضرورة تكثيف الجهد و استثمار الحلول المقترحة في حل وضعيات مشابهة.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma